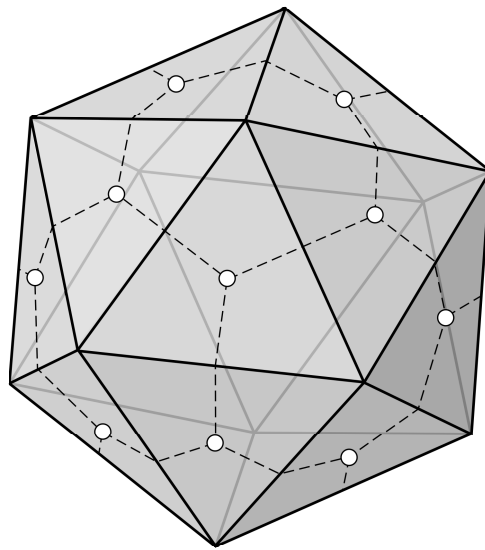


Spin networks, coherent states and twisted geometries



Corentin Schreiber

Maître de stage : Simone Speziale
Laboratoire : CPT, Université Aix-Marseille

12 mars 2012

Table des matières

1	Introduction	1
2	Relativité générale	2
2.1	Les concepts et enseignements	2
2.2	Le formalisme usuel	3
2.3	Une autre formulation : la tétrade	5
2.4	La décomposition 3+1	7
3	Mécanique quantique	10
3.1	Les concepts et enseignements	10
3.2	La quantification canonique	12
4	Quantification canonique de la relativité générale	15
4.1	Une première tentative : la théorie ADM	15
4.2	Une autre approche : la gravité quantique à boucle	16
4.2.1	Le formalisme Hamiltonien	16
4.2.2	Préparation à la quantification : l'algèbre holonomie-flux	19
4.2.3	Quantification, étape 1 : l'espace de Hilbert cinématique	20
4.2.4	Quantification, étape 2 : l'invariance de jauge, les <i>spin networks</i>	22
4.2.5	Entracte : les opérateurs géométriques, aire et volume	25
4.2.6	Quantification, étape 3 : l'espace de Hilbert dynamique	27
5	États cohérents et <i>twisted geometries</i>	29
5.1	Motivation	29
5.2	Introduction aux <i>twisted geometries</i>	29
6	Mise en pratique : la gravité à 3 dimensions	32
6.1	Quelques mots sur la LQG en 3 dimensions	32
6.2	Construction des états de spin network	33
6.3	Construction des états cohérents	34
6.3.1	Introduction et invariance de jauge	34
6.3.2	Quelques approximations	36
6.3.3	Étude des valeurs moyennes et dispersions	37
6.3.4	Résolution de l'identité	40
6.4	Application de la contrainte Hamiltonienne	41
7	Conclusion	42
	Appendices	44
A	Algèbre de $SU(2)$ à partir de la contrainte de Gauss	44
B	Calcul de l'intertwiner cohérent	45
C	Simplification de l'intertwiner cohérent pour $p_i = j_i$	47

1 Introduction

2 Relativité générale

2.1 Les concepts et enseignements

La relativité générale, mise au point en grande partie par Einstein au début du siècle dernier [2], permet de décrire l'influence de la matière sur l'espace-temps et réciproquement. En particulier, on a l'équation suivante, dite *équation d'Einstein* :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

où $T_{\mu\nu}$ est le *tenseur énergie-impulsion*, qui permet de décrire la distribution d'énergie (et donc de matière) dans l'espace-temps, G la *constante de gravitation de Newton*¹, c la vitesse de la lumière (qu'on prendra égale à 1 par la suite), λ la très controversée *constante cosmologique*, et $g_{\mu\nu}$ la *métrique*, objet central dans la formulation usuelle de la relativité générale, qui permet d'exprimer la géométrie de l'espace-temps (les quantités $R_{\mu\nu}$ et R s'expriment en fonction de la métrique et seront introduites par la suite).

Remarque :

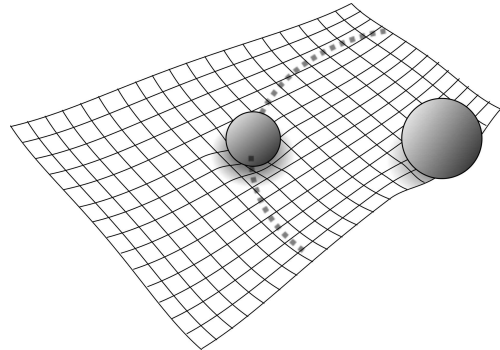
Cette équation est *locale*, et définie en tout point \mathbf{x} de l'espace-temps. On devrait donc écrire $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$, mais il est de coutume d'omettre systématiquement cette précision quand il n'y a pas d'ambiguïté. Nous suivrons cette habitude par la suite.

Une solution particulière de Eq. 2.1 en l'absence de matière ($T_{\mu\nu} = 0$) est la *métrique de Minkowski* :

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \eta_{\mu\nu} \quad \forall \mathbf{x}, \quad (2.2)$$

où $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Cette métrique décrit un espace-temps *plat*, tel qu'on le conçoit usuellement, contrairement à une métrique quelconque $g_{\mu\nu}$ qui décrit un espace-temps potentiellement *courbe*. Un bon exemple permettant de saisir la différence entre ces deux types d'espaces-temps est de comparer un plan et la surface d'une sphère (comme par exemple la surface de la Terre) : ces deux objets sont des surfaces à deux dimensions, mais un certain nombre de propriétés géométriques y sont différentes. Par exemple, si la somme des trois angles qui apparaissent dans un triangle vaut toujours π sur le plan, ce n'est plus vrai sur la sphère : cette somme est toujours plus grande que π , et ne vaut π que pour un triangle infinitésimal (on dit alors que la sphère est *localement* semblable à un espace plat, mais pas globalement).

FIGURE 1 – Illustration de la déformation d'un espace plan par la présence de deux objets massifs, qu'on peut s'imaginer être une planète et son étoile. L'analogie courante est de comparer cette situation à un drap sur lequel on pose deux billes : il se courbe alors sous l'effet de leur poids.



La relativité générale nous enseigne donc que la matière *déforme* l'espace-temps, et que celui-ci peut alors devenir courbe, cf. Fig. 1. Mais ce n'est pas tout. On peut montrer

1. $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ dans les unités standard.

que Eq. 2.1 est invariante par tout changement de coordonnée (ou *difféomorphisme*), qu'on note par exemple $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$. Un exemple simple en trois dimension est le passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Dans ces nouvelles coordonnées, on obtient une autre métrique² :

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}, \quad (2.3)$$

donc un autre $R'_{\mu\nu}$ (mais le même R). Mais ces trois grandeurs vérifient une équation de la même forme que Eq. 2.1. La théorie est donc dite *généralement covariante*, ou *invariante par difféomorphisme*³.

Ce fait apparemment anodin a de nombreuses conséquences. En effet, on a ici considéré un difféomorphisme *passif* (l'espace-temps est inchangé, c'est notre description en terme de coordonnée qui est modifiée), mais on peut également interpréter cette transformation comme un difféomorphisme *actif* (les coordonnées ne changent pas, mais l'espace-temps est modifié), et donc dire que la théorie est également invariante par ces difféomorphismes actifs.

Une description intuitive des conséquences de cette invariance par difféomorphismes actifs est donnée dans [13]. En résumé : dans les théories pré-relativistes⁴, on cherche à prédire des grandeurs comme le champ électrique en un point A de l'espace, représenté par ses coordonnées x^{μ} , et on manipule donc des objets comme $F_{\mu\nu}(x^{\alpha})$, dont on peut comparer les valeurs théoriques aux valeurs expérimentales. Du fait de l'invariance par difféomorphisme actifs, on ne peut plus parler de *point A de l'espace*, et on ne peut donc plus prédire quoi que ce soit qui lui soit associé. Mais alors, que reste-t-il à prédire ? Si la relativité générale englobe *a priori* toutes ces théories pré-relativistes, ne doit-elle pas elle aussi permettre de faire les même prédictions ?

La réponse à cette dernière question est non, du moins pas de la même manière. On ne mesure plus le champ électrique par rapport à un point de l'espace : on mesure le champ électrique *par rapport au champ gravitationnel*. La théorie ne repose donc plus sur un espace-temps fixe et immuable, on dit qu'elle est *indépendante de fond* (ou *background independent*, dans la langue de Shakespear). Le second enseignement de la relativité générale est donc qu'une théorie physique doit être indépendante de fond pour pouvoir décrire correctement l'univers, et donc que toute prédiction physique doit aussi être invariante de fond (de même que les prédictions de l'électromagnétisme sont invariantes de jauge).

Pour une présentation plus détaillée et plus rigoureuse de la relativité générale, le lecteur pourra se référer aux ouvrages classiques, en particulier à [3].

Nous allons maintenant présenter le formalisme usuel de la relativité générale.

2.2 Le formalisme usuel

La métrique, tenseur symétrique en ses deux indices ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), joue un rôle fondamental dans la description de l'espace-temps : c'est elle qui permet d'introduire la notion de longueur sur une trajectoire $\mathbf{x}(s)$ (représentée par ses coordonnées $x^{\mu}(s)$, et paramétrée

2. On utilise ici la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés.

3. Ainsi, si deux métriques sont reliées l'une à l'autre par un changement de coordonnée, alors elles décrivent le même espace temps et sont équivalentes (et réciproquement). On voit alors que toute métrique reliée à la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski par un changement de coordonnée décrit un espace temps plat.

4. "Pré-relativiste" au sens de la relativité générale : la relativité restreinte est donc aussi pré-relativiste.

par la coordonnées s) :

$$L = \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(s)}{ds} \frac{dx^\nu(s)}{ds}} ds, \quad (2.4)$$

la notion d'aire d'une surface (ici paramétrée par deux variables s_1 et s_2) :

$$A = \int_S \sqrt{\det_{\alpha\beta} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu(s_1, s_2)}{\partial s^\alpha} \frac{\partial x^\nu(s_1, s_2)}{\partial s^\beta} \right]} ds_1 ds_2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.5)$$

ou encore la notion de volume d'une région R de l'espace :

$$V = \int_R \sqrt{\det [g_{ab}]} d^3x. \quad (2.6)$$

où g_{ab} est la restriction de la métrique $g_{\mu\nu}$ aux trois coordonnées nécessaires pour décrire le volume. Toutes ces propriétés découlent du fait que $g_{\mu\nu}$ définit en réalité le produit scalaire entre deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} (représentés par leurs coordonnées x^μ et y^ν) :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \equiv x_\mu y^\mu \quad (2.7)$$

On dit alors qu'elle sert à *monter* ou *desendre* les indices des vecteurs (mais également de tout tenseur). On a également le tenseur $g^{\mu\nu}$ qui est défini comme l'inverse de $g_{\mu\nu}$.

À partir de la métrique, on peut définir les grandeurs suivantes. En premier lieu, on a la *connexion de Levi-Civita* (ou *connexion affine*, encore appelée *symboles de Christoffel*) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left[\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right], \quad (2.8)$$

où l'on note $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Elle est symétrique en ses deux indices inférieurs : $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$. Cette connexion permet de définir la *dérivée covariante* d'un vecteur :

$$\nabla_\mu a^\nu = \partial_\mu a^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu a^\alpha, \quad (2.9)$$

$$\nabla_\mu a_\nu = \partial_\mu a_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha a_\alpha, \quad (2.10)$$

et la dérivée covariante d'un tenseur à deux indices :

$$\nabla_\mu b^{\nu\rho} = \partial_\mu b^{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu b^{\alpha\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho b^{\nu\alpha}, \quad (2.11)$$

$$\nabla_\mu b_{\nu\rho} = \partial_\mu b_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha b_{\alpha\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha b_{\nu\alpha}. \quad (2.12)$$

Cette construction se généralise à tout tenseur de rang supérieur. À noter que la dérivée covariante de la métrique est nulle : $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ (elle est *compatible* avec la métrique).

Grâce à cette connexion, on peut également définir le *tenseur de Riemann* :

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha, \quad (2.13)$$

antisymétrique en ses deux derniers indices : $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = -R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}$. Ce nouveau tenseur permet de définir le *tenseur de Ricci* :

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (2.14)$$

qui apparaît dans l'équation d'Einstein, ainsi que la courbure scalaire :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R^\mu{}_\mu. \quad (2.15)$$

qui, comme son nom l'indique, permet de mesurer la courbure de l'espace-temps. Étant un scalaire, on retrouve bien le fait que, sous un changement de coordonnées : $R'(\mathbf{x}') = R(\mathbf{x})$.

Finalement, l'action qui, minimisée, mène à l'équation d'Einstein Eq. 2.1, aussi appelée *action d'Einstein-Hilbert*, est définie par :

$$S_{\text{EH}} = \int \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} R d^4x . \quad (2.16)$$

Cette formulation doit être familière pour quiconque a déjà travaillé avec la relativité générale, et nous la rappelons ici principalement dans le but de fixer nos conventions, mais aussi pour permettre la comparaison avec le formalisme que nous allons présenter dans la section suivante.

2.3 Une autre formulation : la tétrade

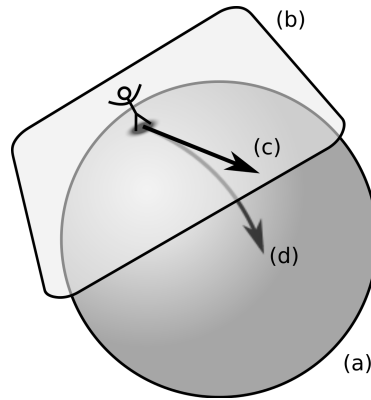
On définit la tétrade (ou *vierbein*) $e_{\mu}^{\nu}(\mathbf{x})$ par :

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = e_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{x}) e_{\nu}^{\beta}(\mathbf{x}) \eta_{\alpha\beta} . \quad (2.17)$$

On notera que, $\eta_{\alpha\beta}$ étant une métrique, cette équation présente une forte ressemblance avec Eq. 2.3. Cependant, il est important de réaliser que la tétrade ne représente *pas* un vrai changement de coordonnée. Si c'était le cas, alors toute métrique serait équivalente à la métrique plate, et décrirait donc un espace-temps plat. En effet, ici aussi, l'équation est *locale* : la tétrade est définie localement, et non globalement (contrairement à un vrai changement de coordonnée).

La tétrade prend alors la place de la métrique au centre du formalisme. Son intérêt devient évident si l'on s'attarde un peu sur l'interprétation de Eq. 2.17. En effet, on a vu dans la première section que la surface d'une sphère est *localement plate*. C'est en réalité le cas de tout espace-temps. En d'autres termes : il est toujours possible de trouver un changement de coordonnée (ou changement de référentiel) qui permet de rendre la métrique plate *en un point*⁵ : c'est le principe d'équivalence d'Einstein⁶. La tétrade regroupe donc l'ensemble de ces changements de coordonnées (un pour chaque point) en un seul objet. En chaque point, elle permet de transformer tout objet exprimé dans le référentiel *plat* local vers l'espace-temps "réel", potentiellement courbe.

FIGURE 2 – Schéma représentant le plan tangent (b) à une sphère (a) en un point. Un vecteur (c) dans le référentiel Lorentzien est transporté sur un vecteur (d) de la sphère grâce à la tétrade. Comme expliqué dans la note de bas de page 7., l'image est un peu abusive, mais permet de se fixer les idées.



5. Mais pas partout ailleurs : si c'est le cas, alors la métrique est déjà globalement plate.

6. En effet, rendre la métrique plate en un point \mathbf{x} revient à trouver un *référentiel inertiel* en ce point, ce qui est toujours possible.

Ainsi, un vecteur v^μ exprimé dans le référentiel plat au point \mathbf{x} et son homologue dans l'espace-temps général $w^\nu = e^\nu{}_\mu(\mathbf{x}) v^\mu$ ne vivent pas vraiment dans le même espace : on appelle, un peu abusivement⁷, l'espace plat local l'*espace tangent* au point (voir Fig. 2 pour une illustration sur la sphère). Pour rendre cette séparation plus évidente, on va noter les indices des objets exprimés dans ce référentiel par des lettres majuscules I, J, K , etc. Ces indices sont manipulés avec la métrique plate η_{IJ} . Ainsi l'équation de définition de la tétrade devient :

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = e_\mu^I(\mathbf{x}) e_\nu^J(\mathbf{x}) \eta_{IJ}. \quad (2.18)$$

On peut donc travailler avec des objets du référentiel plat, puis repasser dans l'espace-temps général si nécessaire grâce à la tétrade.

L'avantage de travailler avec de tels objets est qu'ils possèdent d'avantage de symétrie. En effet, le référentiel étant inertiel (on a localement annulé les effets de la gravité), c'est la relativité *restreinte* qui s'applique : les coordonnées de tout vecteur ou tenseur se transforment comme des représentations du groupe de Lorentz $SO(3,1)$. On peut d'ailleurs voir sur Eq. 2.18 que la tétrade est elle-même définie à une transformation de Lorentz près. En effet, si l'on prend $\tilde{e}_\mu^I(\mathbf{x}) = \Lambda^I{}_J e_\mu^J(\mathbf{x})$ avec $\Lambda \in SO(3,1)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_\mu^I(\mathbf{x}) \tilde{e}_\nu^J(\mathbf{x}) \eta_{IJ} &= e_\mu^K(\mathbf{x}) e_\nu^L(\mathbf{x}) \Lambda^K{}_I \eta_{KL} \Lambda^J{}_L \\ &= e_\mu^K(\mathbf{x}) e_\nu^L(\mathbf{x}) \eta_{KL} = g_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

et on montre bien que les deux tétrades e et \tilde{e} décrivent la même métrique, et sont donc équivalentes. Le groupe de Lorentz peut alors être vu comme *groupe de jauge* de la relativité générale : on a, en chaque point, une certaine liberté au niveau du choix du référentiel inertiel (qu'on appelle aussi *référentiel Lorentzien*, au vu des propriétés que l'on vient de mettre en évidence).

Nous allons maintenant donner l'équivalent du formalisme présenté dans la section précédente, mais exprimé dans ce nouvel espace.

L'équivalent de la connexion de Levi-Civita est la *connexion de spin* $\omega_{\mu,J}^I$ (ou *connexion Lorentzienne*). Elle permet de définir une autre dérivée covariante pour les objets vivant dans le référentiel Lorentzien :

$$D_\mu x^I = \partial_\mu x^I + \omega_{\mu,J}^I v^J, \quad (2.19)$$

$$D_\mu x_I = \partial_\mu x_I - \omega_{\mu,I}^J v_J, \quad (2.20)$$

qui est compatible avec la métrique de Minkowski : $D_\mu \eta_{IJ} = 0$. Pour la déterminer, on remarque que la dérivée covariante *totale* de la tétrade est nulle :

$$\mathcal{D}_\mu e_\nu^I \equiv \partial_\mu e_\nu^I + \omega_{\mu,J}^I e_\nu^J - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha^I = 0, \quad (2.21)$$

ce qui se démontre rapidement en décomposant un même vecteur sur la base inertielle e_I et la base générale e_μ comme $\mathbf{v} = v^I e_I = v^\mu e_\mu$, puis en calculant sa dérivée covariante

7. Le terme d'espace tangent est en réalité déjà utilisé en géométrie différentielle pour *définir* tout vecteur ou tenseur. En effet, dans ce formalisme, on dit que l'espace-temps est une *variété*, qui est une structure bien moins forte que celle de l'espace vectoriel. On introduit alors un espace tangent en chaque point, dans lequel on définit nos vecteurs et tenseurs. Ainsi, de ce point de vue, tout vecteur "de l'espace-temps" fait aussi partie d'un espace tangent. La seule différence entre ces deux espaces tangents est leur métrique, plate pour l'un, et potentiellement courbe pour l'autre.

$\mathcal{D}_\mu \mathbf{v}$ pour ces deux décompositions. Cette condition permet d'exprimer la connexion de spin en fonction de la tétrade et de la connexion de Levi-Civita :

$$\omega_{\mu J}^I = e_\nu^I \left(\partial_\mu e_J^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu e_J^\alpha \right) = e_\nu^I \nabla_\mu e_J^\nu. \quad (2.22)$$

À partir de cette connexion, on définit l'équivalent du tenseur de Riemann, sobrement appelé *tenseur de courbure* :

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu \omega_\nu^{IJ} - \partial_\nu \omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{IK} \eta_{KL} \omega_\nu^{LJ} - \omega_\nu^{JK} \eta_{KL} \omega_\mu^{LI}, \quad (2.23)$$

qu'on peut ré-exprimer en fonction du tenseur de Riemann :

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = e_\rho^I e_\sigma^J R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}. \quad (2.24)$$

Pour finir, l'action d'Einstein-Hilbert (qu'on appelle, ainsi formulée, l'*action de Palatini*) se ré-écrit dans ce formalisme :

$$S_{\text{EH}} = \int e e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} d^4x, \quad (2.25)$$

ce qui se retrouve bien en partant de Eq. 2.16 et sachant que :

$$g \equiv \det[g_{\mu\nu}] = -\det[e_\mu^I]^2 \equiv -e^2. \quad (2.26)$$

Nous aurons également besoin des expressions de l'aire d'une surface S :

$$A = \int_S \sqrt{e^2 e_I^\mu \eta^{IJ} e_J^\nu n_\mu n_\nu} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (2.27)$$

où $n_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma_1} \frac{\partial x^\rho}{\partial \sigma_2}$ est le vecteur normal à la surface, ainsi que le volume d'une région R , qui s'exprime simplement :

$$V = \int_R \det[e_a^i] d^3x. \quad (2.28)$$

où, comme pour l'expression avec la métrique, e_a^i est la restriction de la tétrade aux coordonnées nécessaires pour décrire le volume considéré (qu'on appelle aussi *triade* ou *drierbein*, et qui sera étudiée plus en détail par la suite).

Nous allons maintenant présenter un troisième formalisme, qui est celui que nous utiliserons par la suite.

2.4 La décomposition 3+1

Les coordonnées de temps et d'espace sont rassemblées en un seul objet, le quadri-vecteur x^μ . Rien ne nous empêche cependant de sectionner l'espace-temps en un *feuilletage*, où chaque section est un volume à trois dimensions, indexé par un paramètre. On peut donc interpréter ce feuilletage comme représentant une collection d'espaces à différents temps, mais on sait par ailleurs que la coordonnée de temps t ne représente pas *nécessairement* un temps physique : cette image n'est donc pas toujours adéquate, et il faut s'en méfier (l'invariance par difféomorphisme fait perdre tout son sens à cette coordonnée), mais elle permet néanmoins de se fixer les idées. Une illustration d'un tel feuilletage est donnée Fig. 3.

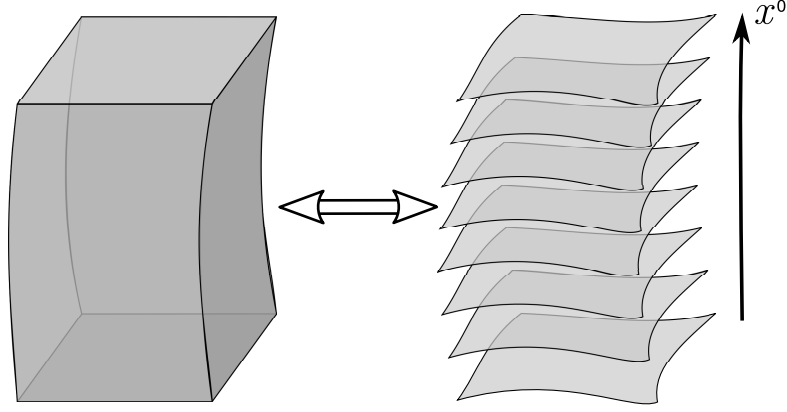


FIGURE 3 – Illustration du feuilletage de l'espace-temps (à gauche) en une collection d'espaces de dimension $D - 1$ (ici des surfaces, à droite), indexées par une coordonnée (x^0).

Sur chacune de ces sections d'espace-temps, on peut définir deux types de courbure : la courbure *intrinsèque*, créée par la topologie de la section elle-même, et la courbure *extrinsèque*, créée par le raccordement des sections entre elles. On peut dire que la courbure intrinsèque se ressent quand on passe d'un point de la surface à un autre, et que la courbure extrinsèque se ressent lors du passage d'une section à une autre. Cette dernière est déterminée par le *plongement* des sections dans l'espace-temps.

Concrètement, en supposant comme dans l'exemple de Fig. 3 que c'est la coordonnée x^0 (qu'on appellera t , sans signification physique aucune) qui indexe les sections d'espace-temps, on peut définir le *vecteur normal* aux sections, qu'on appelle $n^\mu(\vec{x})$ (ici, \vec{x} représente un point de la section, un vecteur de l'espace-temps s'écrit alors $x^\mu = (t, \vec{x})$), et qu'on prendra unitaire. On peut également définir le *vecteur d'écoulement du temps* :

$$\tau^\mu \equiv \partial_t x^\mu = (1, 0, 0, 0) . \quad (2.29)$$

De manière générale, ces deux vecteurs sont différents, et on décompose τ^μ de la manière suivante :

$$\tau^\mu = N(\vec{x}) n^\mu(\vec{x}) + N^\mu(\vec{x}) , \quad (2.30)$$

où $N(\vec{x})$ est communément appelé le *lapse*, et $N^\mu(\vec{x})$ le *shift*. Une expression possible pour n^μ est alors (en omettant la dépendance en \vec{x} pour plus de clarté) :

$$n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^a}{N} \right) , \quad (2.31)$$

où l'on introduit la notation pour les indices des objets vivants dans les sections d'espace-temps : $a = 1, 2, 3$ (les indices Lorentziens dans les sections seront notés i, j, k , etc.). Avec ce choix, le lapse est un vecteur appartenant à la section : $N^\mu = (0, N^a)$.

L'interprétation des ces deux quantités N et N^a se lit sur Eq. 2.29 et Eq. 2.30 :

$$\partial_t x^\mu = N n^\mu + N^\mu \iff x^\mu(t + \delta t) = x^\mu(t) + N n^\mu \delta t + N^\mu \delta t . \quad (2.32)$$

Quand on passe d'une section à une autre, les vecteurs subissent deux décalages : le premier correspond simplement à l'écart entre les deux sections, et est défini par le lapse N . Le second correspond à un décalage au sein même de la section, et est défini par le shift N^μ

(car on a vu qu'on pouvait prendre N^μ comme étant un vecteur vivant dans la section). En introduisant ces deux variables, on peut alors donner la forme de la métrique :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(N^2 - N_c N^c) & N_b \\ N_a & g_{ab} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

où l'on définit g_{ab} comme étant la restriction spatiale de la métrique. Les indices des vecteurs d'une section se montent et se descendent à l'aide de g_{ab} .

La *métrique intrinsèque* (ou *métrique induite*) sur une section (celle avec laquelle on définit toutes les quantités intrinsèques : courbure, etc.) n'est pas g_{ab} , mais elle est définie par (la restriction spatiale de) :

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (2.34)$$

Cette nouvelle métrique peut également être utilisée pour monter et descendre les indices des objets vivants dans les sections, puisque par définition leur produit scalaire avec la normale n^μ est nul. Contractée avec la métrique totale sur un de ses indices, la métrique induite donne un projecteur q_ν^μ qui envoie tout vecteur de l'espace-temps sur une section. Ce projecteur nous permet alors de définir la *courbure extrinsèque* :

$$K_{\mu\nu} = q_\mu^\alpha q_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta, \quad (2.35)$$

tenseur symétrique qui est le chaînon manquant entre la courbure intrinsèque \mathcal{R} à la courbure totale R .

Il est possible de dire beaucoup d'autres choses intéressantes sur ce formalisme (en particulier donner la relation qui relie K , \mathcal{R} et R), mais cela n'aura que peu d'intérêt pour la suite de la discussion. Le lecteur pourra se référer à [3] pour plus d'informations.

Appliqué au formalisme de la tétrade, la décomposition 3+1 permet d'exprimer cette dernière en fonction du shift et du lapse :

$$e_0^I = N n^I + N^a e_a^I, \quad (2.36)$$

et on définit alors la *triade* e_a^i comme la restriction spatiale de la tétrade. De plus, on a vu que le groupe de Lorentz $SO(3,1)$ était un groupe de jauge pour la relativité générale dans ce formalisme. On peut donc *choisir une jauge* qui nous arrange, étant donné que ce choix n'a par définition aucune influence sur la physique du problème. Dans ce qui suit, on fera le choix de la *jauge de temps* :

$$e_\mu^I n^\mu = \delta_0^I, \quad (2.37)$$

ce qui revient à choisir (l'indice Lorentzien étant pris comme indice de colonne) :

$$e_\mu^I = \begin{pmatrix} N & N^b e_b^i \\ 0 & e_a^i \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Tout comme la connaissance de la métrique ou de la tétrade définit complètement la géométrie de l'espace-temps, il en va de même dès qu'on a connaissance simultanée des fonctions de lapse et de shift, ainsi que de la triade.

Ceci clos notre présentation de la relativité générale et du formalisme que nous allons employer. Dans la section suivante, nous allons présenter brièvement les fondements de la mécanique quantique ainsi que la procédure de quantification canonique.

3 Mécanique quantique

3.1 Les concepts et enseignements

La mécanique quantique est contemporaine de la relativité générale. Au même titre que la relativité générale, c'est une théorie techniquement bien maîtrisée, prouvée à maintes reprises par divers dispositifs expérimentaux, mais dont l'interprétation est loin d'être simple.

On ne peut pas, comme nous l'avons fait avec la relativité générale (cf. Eq. 2.1), la résumer en une seule équation. La mécanique quantique est en effet plus une *approche* différente d'un problème, dans un formalisme bien particulier. Nous allons donner ici les six *postulats* de cette théorie, en nous inspirant de leur énoncé dans [14] :

Postulat 1 - L'état d'un système physique à un temps t est complètement décrit par un *vecteur d'état*, que l'on note généralement $|\psi(t)\rangle$ (notation en *bra* et *ket* de Dirac), et qui appartient à un espace abstrait qu'on appelle *espace des états*, noté \mathcal{H} . C'est mathématiquement un *espace de Hilbert*, muni d'un produit scalaire $(|\psi(t)\rangle, |\phi(t')\rangle) \equiv \langle\psi(t)|\phi(t')\rangle$ sesquilineaire : $\langle\psi(t)|\phi(t')\rangle = \langle\phi(t')|\psi(t)\rangle^*$.

Postulat 2 - Toute grandeur physique est représentée par un opérateur agissant dans l'espace des états, qu'on appelle alors une *observable*. La notation usuelle est de coiffer la grandeur d'un chapeau : \hat{A} . Ces opérateurs sont *hermitiens* (leurs valeurs propres sont réelles, et leurs vecteurs propres forment une base complète de \mathcal{H}).

Postulat 3 - Le résultat d'une mesure (directe ou indirecte) d'une telle grandeur est l'une des valeurs propres de l'opérateur \hat{A} .

Postulat 4 - Si l'on note $|a_n(t)\rangle$ les différents vecteurs propres de l'opérateur \hat{A} tels que $\hat{A}|a_n(t)\rangle = a_n|a_n(t)\rangle$, alors on peut décomposer un vecteur d'état sur la base formée par ces vecteurs propres comme $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |a_n(t)\rangle$. Le coefficient de décomposition c_n est l'*amplitude de probabilité* de mesurer la valeur a_n sur un système dans l'état $|\psi(t)\rangle$. La probabilité est quant à elle égale à $|c_n|^2$. Si la valeur propre a_n est dégénérée, alors elle correspond à plusieurs vecteurs propres $|a_n(t), r\rangle$, l'état se décompose comme $|\psi(t)\rangle = \sum_{n,r} c_{n,r} |a_n(t), r\rangle$ et la probabilité de mesurer a_n est donnée par $\sum_r |c_{n,r}|^2$.

Postulat 5 - Si l'on effectue une mesure sur un système $|\psi(t)\rangle$ et qu'on obtient la valeur a_n , alors l'état dans lequel se trouve le système juste après la mesure est décrit comme une combinaison linéaire des $|a_n(t), r\rangle$, vecteurs propres associés à a_n . On appelle ce phénomène la *réduction du paquet d'onde*.

Postulat 6 - L'évolution d'un système dans le temps est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle , \quad (3.1)$$

où l'opérateur \hat{H} est le *Hamiltonien* du système, opérateur qui représente l'énergie, et \hbar la constante de Plank⁸. Une formulation alternative consiste à transférer la dépendance au temps t dans la définition des observables. Ainsi, les vecteurs d'état ne dépendent plus

8. $\hbar = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$ dans les unités standard.

du temps, $|\psi\rangle$, mais les opérateurs oui, $\hat{A}(t)$. L'équivalent de l'équation de Schrödinger est alors :

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)] , \quad (3.2)$$

qu'on appelle *équation de Heisenberg*.

Ces quelques postulats permettent de construire une théorie qui n'a encore jamais été mise en défaut. Ils considèrent la nature comme étant *fondamentalement* probabiliste : le résultat d'une mesure est en général aléatoire, et donc impossible à prédire, mais les *probabilités* sont en revanche totalement déterminées. Ce fait a été perçu par beaucoup comme une faiblesse de la mécanique quantique, et le signe qu'il devait y avoir une autre théorie, plus fondamentale, qui permettrait de se passer de l'aléatoire (Einstein le premier). Rien ne permet pour l'instant de l'affirmer.

L'autre concept important que nous a apporté la mécanique quantique est la notion d'observables *incompatibles*. Le second postulat indique en effet que toute grandeur physique est représentée par un *opérateur*. Or, rien ne dit que tous les opérateurs *commutent* entre eux, et ce n'est d'ailleurs pas le cas en général. L'exemple le plus simple est probablement le plus connu : on considère une observable, la position \hat{x} d'une particule, et sa variable conjuguée⁹, l'impulsion \hat{p} . Leur *commutateur* est donné par :

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x} \hat{p} - \hat{p} \hat{x} = i\hbar \mathbb{1} , \quad (3.3)$$

en pleine analogie avec le crochet de Poisson $\{x, p\} = 1$ de la mécanique analytique (qu'on retrouvera dans la section suivante). Ce commutateur (qui mesure un *défaut de commutation*) n'étant pas nul, les deux produits $\hat{x} \hat{p}$ et $\hat{p} \hat{x}$ sont différents. En termes plus physique, si l'on souhaite mesurer la position et l'impulsion d'une particule, alors les résultats seront différents selon l'ordre dans lequel on fait les mesures : position puis impulsion, ou impulsion puis position. Le cas particulier où l'on mesure les deux *en même temps* n'est donc pas défini : il est alors impossible de connaître *simultanément* la position exacte et l'impulsion exacte d'une particule. Ce résultat se retrouve exprimé dans la *relation d'incertitude* de Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} , \quad (3.4)$$

où Δx et Δp sont les écarts-types des mesures pour un état $|\psi\rangle$ quelconque. Cette relation indique clairement que l'on ne peut avoir simultanément $\Delta x = \Delta p = 0$. Si par exemple seul $\Delta x = 0$, alors on connaît la position exacte de la particule, mais la relation d'incertitude impose alors que $\Delta p = \infty$: l'impulsion est complètement indéterminée.

Enfin, les développements de la mécanique quantique montrent que certaines grandeurs que l'on considère comme continues à notre échelle (l'énergie, le moment cinétique, ...) sont en réalité des grandeurs *discrètes*, qui ne peuvent prendre qu'un ensemble discret de valeurs. Le pas entre deux valeurs voisines est appelé *quantum*. Typiquement, on peut prendre comme exemple les quanta de moment cinétique. Toutes les grandeurs physiques ne sont cependant pas rendues discrètes par la mécanique quantique, ce n'est pas un mécanisme général.

Nous allons maintenant voir une des méthodes possibles pour passer du formalisme "classique" d'un problème à la formulation quantique qui lui est associée.

9. Conjuguée au sens de la mécanique analytique.

3.2 La quantification canonique

Il existe plusieurs manières totalement équivalentes de décrire un problème classique. Prenons l'exemple simple d'une particule vivant dans un espace à une dimension ($x \in \mathbb{R}$) et soumise à une force dérivant d'un potentiel $F(x) = -\partial_x V(x)$, dont on voudrait connaître la trajectoire. L'approche la plus simple consiste à utiliser le principe fondamental de la dynamique, mis au point par Newton au XVII^{ème} siècle :

$$m \ddot{x} = F(x) = -\partial_x V(x), \quad (3.5)$$

qui nous donne une équation différentielle du second ordre en temps sur la variable de position x (les doubles points symbolisent la double dérivation par rapport au temps). La résolution de cette équation différentielle et la donnée de la position x_0 et de la vitesse \dot{x}_0 initiales donnent alors une unique solution au problème.

Un siècle plus tard, Lagrange introduit une autre méthode plus générale pour résoudre tout problème de mécanique, qu'on appelle la *mécanique analytique*¹⁰. L'approche est un peu différente : si l'on se donne la position initiale x_0 à $t = 0$ et la position finale x_1 à $t = T$, on se pose la question de savoir quelle est la trajectoire $x(t)$ de la particule soumise à la même force $F(x)$ et qui passe par ces deux points $(x_0, 0)$ et (x_1, T) de l'espace-temps. La mécanique analytique nous dit alors que c'est la trajectoire qui va extrémiser l'*action* qu'on définit comme :

$$S[x(t)] = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (3.6)$$

où L est le *Lagrangien*, fonction de x , de sa dérivée \dot{x} et éventuellement du temps t . Quel que soit L , la solution de ce problème est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (3.7)$$

On retrouve alors Eq. 3.5 si l'on prend $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$. Cette nouvelle formulation possède de nombreux avantages sur la première. Les symétries y sont par exemple plus simples à identifier, etc.

On peut aussi définir le *moment conjugué* p de toute variable x comme :

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (3.8)$$

et faire une transformée de Legendre pour se débarrasser de la dépendance en \dot{x} et la remplacer par p (ce qui nécessite d'inverser la relation précédente pour avoir \dot{x} en fonction de x et p). On dit alors qu'on travaille dans l'*espace des phases*, défini par l'ensemble des couples (x, p) . Ce faisant, on obtient alors le *Hamiltonien* H , défini ici par $H = \dot{x}p - L$, et qui mène aux équations de Hamilton :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Ce Hamiltonien est la grandeur classique qui correspond au Hamiltonien quantique \hat{H} : elle représente donc l'énergie totale du système. La formulation Hamiltonienne permet de résoudre un problème en ne traitant que des équations différentielles du premier ordre, ce qui est bien plus simple (mais le changement de variable $\dot{x} \rightarrow p$ peut être non trivial).

10. Une partie de la présentation qui en est faite ici est inspirée de [7], ainsi que du cours de Théorie Quantique des Champs de A. Bilal.

On définit ensuite les *crochets de Poisson* de deux fonctions de x et p par :

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (3.10)$$

et on obtient facilement à partir de cette définition que $\{x, p\} = 1$. Le crochet de poisson est antisymétrique $\{A, B\} = -\{B, A\}$ et vérifie l'identité de Jacobi. Grâce à lui, on peut ré-écrire simplement les équations de Hamilton comme :

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H\}, \quad (3.11)$$

où A symbolise soit x soit p (ou encore toute fonction définie sur l'espace des phases). On voit alors simplement que toute quantité A dont le crochet de Poisson avec H s'annule est une *constante du mouvement*, car sa dérivée temporelle est nulle. On les appelle aussi *charges conservées*.

D'après le théorème de Noether, à toute charge conservée correspond une *symétrie* du problème, donc une transformation des variables qui laisse la physique inchangée. Supposons que l'on a dans notre problème une telle charge Q , et que son crochet de Poisson avec x vaut $\{x, Q\} \equiv u \delta x(t) \neq 0$. On peut alors montrer, grâce aux propriétés du crochet de Poisson, que si $x(t)$ est solution du problème, alors $x'(t) = x(t) + u \delta x(t)$ l'est aussi (pour u infinitésimal à vérifier!). Comme exemple, on peut simplement prendre $Q \equiv H$: la coordonnée transformée x' s'écrit :

$$x'(t) = x(t) + u \dot{x}(t) = x(t + u). \quad (3.12)$$

La symétrie associée à la charge conservée H est donc la translation dans le temps, et le générateur infinitésimal est $\frac{d}{dt}$. Un autre exemple simple est de prendre $Q \equiv p$, dans le cas particulier où $V(x) = 0$. On trouve alors la symétrie par translation dans l'espace.

On peut alors imaginer le processus de quantification suivant, qu'on appelle la *quantification canonique* : on part d'une théorie classique et de sa formulation Hamiltonienne. On transforme formellement les variables et leurs moments conjugués en opérateurs : $x \rightarrow \hat{x}$, $p \rightarrow \hat{p}$, et on change leurs crochets de Poisson en commutateurs : $\{x, p\} \rightarrow i\hbar [x, p]$. Ainsi, le Hamiltonien, en tant que fonction de x et p , devient lui-même un opérateur défini par $\hat{H} \equiv H(\hat{x}, \hat{p})$. Cette opération permet de s'assurer que les équations de Hamilton sont respectées par les *valeurs moyennes* des opérateurs \hat{x} et \hat{p} dans la limite classique.

Il existe cependant des cas où l'on ne peut pas inverser Eq. 3.8, en particulier s'il existe une *contrainte* impliquant p et/ou x . L'exemple le plus simple est le cas où L ne dépend pas de \dot{x} , et donc que $p = 0$ (c'est une contrainte dite *primaire*, car elle découle directement de la structure de L . On dit alors de x qu'il est un *multiplicateur de Lagrange*). Dans ce genre de cas, on ne peut en général pas appliquer simplement la procédure décrite ci-dessus. Supposons donc qu'il existe un ensemble de contraintes :

$$\chi_i(x, p) = 0. \quad (3.13)$$

Si l'on considère l'espace des phases entier (x, p) , alors on sait qu'il existe des régions où les contraintes ne sont pas vérifiées : quelles que soient les conditions initiales et finales qu'on impose au problème, aucune solution physique n'y sera jamais présente.

Les crochets de Poisson que l'on a défini auparavant sont insensibles à ces contraintes : on fait les calculs comme si elles n'existaient pas. Ils permettent alors de distinguer deux classes de contraintes : les *contraintes de première classe*, qui vérifient $\{\chi_i, \chi_j\}|_{\chi_k=0} = 0 \forall j$

(leur crochet de Poisson avec toute autre contrainte s'annule si l'on impose la nullité des contraintes *après le calcul*), et les autres, qu'on appelle alors *contraintes de seconde classe*, qui vérifient $\{\chi_i, \chi_j\}|_{\chi_k=0} = C_{ij} \neq 0$. Nous ne nous intéresserons pas à ces dernières dans le présent exposé, car nous n'en rencontrerons aucune par la suite. Nous serons en revanche confrontés à des contraintes de première classe, qu'il faudra donc traiter pour rendre la quantification possible.

Pour travailler sur un exemple non trivial, on va devoir considérer *deux* variables x_1 et x_2 et le Lagrangien¹¹ :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 - V(x_1 + x_2), \quad (3.14)$$

qui est évidemment simplifiable en posant $x_3 = x_1 + x_2$ et en ne travaillant plus qu'avec une seule variable, comme avant. Mais après tout, rien ne nous empêche de traiter le problème de cette façon, et cela nous permettra de voir un exemple concret d'une contrainte et de sa signification. Les moments conjugués sont $p_1 = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = p_2$: on a donc la contrainte primaire $\chi = p_1 - p_2$. Naïvement, le Hamiltonien correspondant est alors :

$$H_0 = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + V(x_1 + x_2) = \frac{p_1^2}{2m} + V(x_1 + x_2), \quad (3.15)$$

mais on a perdu l'information $p_1 = p_2$ qu'on avait dans le Lagrangien (et ce même si on avait essayé de garder une expression symétrique en $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ par exemple). La seule solution est d'introduire un multiplicateur de Lagrange u associé à la contrainte χ dans l'action, ce qui revient à définir un nouvel Hamiltonien :

$$H = H_0 + u \chi, \quad (3.16)$$

indentique à H_0 si l'on applique la contrainte $\chi = 0$, et qui mène donc aux mêmes résultats physiques. On voit alors que $\{\chi, H\} = \{\chi, H_0\} = 0$, et donc que χ est une constante du mouvement, ce qui signifie que la *surface* $p_1 = p_2$ dans l'espace des phases (x_1, p_1, x_2, p_2) est stable par évolution dans le temps. Comme on a une constante du mouvement, on sait qu'on a une symétrie associée : sachant que $\{x_1, u\chi\} = u$ et $\{x_2, u\chi\} = -u$, la transformation de symétrie est donc :

$$x'_1 = x_1 + u \quad \text{et} \quad x'_2 = x_2 - u, \quad (3.17)$$

ce qui se lit facilement sur le Lagrangien initial. On a donc un degré de liberté interne u , qui ne joue *aucun rôle* dans la physique du problème : la symétrie considérée est alors appelée *transformation de jauge*. La contrainte est totalement éliminée en fixant la jauge, c'est à dire en imposant une combinaison particulière (qui peut éventuellement nous simplifier les calculs) des x_i et p_i , telle que la contrainte soit respectée.

On peut donc toujours se débarrasser des contraintes de première classe, et appliquer la procédure de quantification canonique sans problème (tant qu'on a pas de contrainte de deuxième classe). Pour ce faire, on applique d'abord la procédure comme si les contraintes n'existaient pas, et on définit alors un premier espace de Hilbert dit *cinématique* \mathcal{H}_{kin} . On transforme les différentes contraintes en opérateurs, $\chi \rightarrow \hat{\chi}$, puis on impose que $\hat{\chi}|\psi\rangle = 0$ pour tout état physique $|\psi\rangle$. L'ensemble de ces états forme alors un sous-espace de Hilbert dit *physique* \mathcal{H}_{phys} .

Nous allons maintenant essayer d'appliquer ce programme de quantification à la relativité générale.

11. L'exemple est tiré directement de [7].

4 Quantification canonique de la relativité générale

4.1 Une première tentative : la théorie ADM

Le contenu de cette section est inspiré des notes de cours de S. Speziale [16]. Le plan d'action est le suivant : on va chercher une formulation Hamiltonienne de la relativité générale, déterminer son algèbre de Poisson (les crochets canoniques des variables et de leurs conjuguées), puis appliquer la procédure de quantification canonique présentée dans la section précédente. Nous utiliserons dans ce qui suit des unités dans lesquelles $16\pi G = 1$.

La première difficulté est d'arriver à appliquer le formalisme Hamiltonien à la relativité générale. En effet, celui-ci met le temps dans une position bien particulière par rapport aux autres variables, alors que la relativité générale s'évertue à le remettre à sa place, c'est à dire en tant que simple coordonnée. La solution est d'utiliser le formalisme 3+1, présenté plus tôt. Ce formalisme permet de prendre une coordonnée à part, qu'on nommera t , et de s'en servir pour feuilleter l'espace-temps en surfaces Σ_t . Cette coordonnée servira de temps pour le formalisme Hamiltonien, et l'invariance par difféomorphisme nous garantit que les résultats obtenus doivent être indépendants du choix de t : il n'y a donc pas de problème.

La seconde difficulté est de choisir les variables adéquates pour décrire l'espace-temps. Dans le formalisme 3+1, on a la métrique induite q_{ab} , le shift N^a et le lapse N . Ces variables posent en réalité quelques problèmes, comme nous allons le voir. L'action correspondante s'écrit :

$$S = \int dt \int d^3x \sqrt{q} N \left[\mathcal{R} - K^2 + \text{Tr}(K K) \right], \quad (4.1)$$

avec \mathcal{R} la courbure intrinsèque et K la courbure extrinsèque. On peut voir que les dérivées temporelles de N et N^a n'apparaissent pas dans le Lagrangien : ce sont des multiplicateurs de Lagrange, de moment conjugué nul. La seule variable dynamique est donc la métrique induite q_{ab} , et son moment conjugué est $\pi_{ab} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab})$. Après transformée de Legendre, on obtient l'action pour le Hamiltonien $H \equiv \int d^3x \mathcal{H}$:

$$S = \int dt \int d^3x \left[\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{H} \right], \quad \text{avec :} \quad \mathcal{H} \equiv N^a H_a - N H, \quad (4.2)$$

où $H_a \equiv -2\sqrt{q} \nabla_b (\pi_a^b / \sqrt{q})$, et $H \equiv (q_{ac} q_{bd} + q_{ad} q_{bc} - q_{ab} q_{cd}) \pi^{ab} \pi^{cd} / \sqrt{q} - \sqrt{q} \mathcal{R}$. En cherchant à annuler la variation de cette action par rapport aux deux multiplicateurs de Lagrange N et N^a , on trouve nécessairement que les deux quantités H et H_a sont nulles pour toute solution physique : ce sont des contraintes. H est appelée la contrainte *Hamiltonienne* (ou *scalaire*), et H_a la contrainte des *difféomorphismes spatiaux* (ou *vectorielle*). Le Hamiltonien H est donc assez particulier : il ne contient que des termes de contraintes, et aucune dynamique. Mais c'est normal : on sait que la variable t n'est pas réellement un temps, il n'y a donc pas de raison pour qu'il y ait une vraie dynamique en t .

Il se trouve que ces deux contraintes sont de première classe : elles sont donc chacune associées à une transformation de jauge. Pour déterminer quelles sont ces transformations, on évalue leur crochet de Poisson avec les variables q_{ab} et π^{ab} . Pour cela, on travaille avec leur forme intégrale (*smearred constraints* en anglais)¹² :

$$H(\vec{N}) \equiv \int d^3x N^a H_a, \quad \text{et} \quad H(N) \equiv \int d^3x N H, \quad (4.3)$$

12. On introduit ces expressions pour régulariser le crochet de Poisson : si l'on travaillait directement avec H_a et H , ceux-ci seraient des distributions (principalement des deltas de Dirac), qui ne sont réellement bien définies qu'à l'intérieur d'une intégrale.

et on obtient les crochets suivants pour la contrainte vectorielle :

$$\{H(\vec{N}), q_{ab}\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} q_{ab}, \quad \{H(\vec{N}), \pi^{ab}\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} \pi^{ab}, \quad (4.4)$$

où $\mathcal{L}_{\vec{N}}$ est la dérivée de Lie par rapport au vecteur \vec{N} : elle représente comment varie un objet sous un changement de coordonnée infinitésimal $x'_a = x_a + N_a d\lambda$. La contrainte vectorielle est donc associée aux difféomorphismes "spatiaux" (car \vec{N} est choisi purement spatial). Les crochets de Poisson pour la contrainte scalaire sont quant à eux :

$$\begin{aligned} \{H(N), q_{ab}\} &= \mathcal{L}_{N\vec{n}} q_{ab}, \\ \{H(\vec{N}), \pi^{ab}\} &= \mathcal{L}_{N\vec{n}} \pi^{ab} + \frac{1}{2} q^{ab} N H - N \sqrt{q} (q^{ca} q^{bd} - q^{cb} q^{ad}) R_{cd}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où l'on remarque que les termes supplémentaires dans la seconde équation s'annulent on-shell¹³ (où $H = 0$ car c'est une contrainte, et $R_{cd} = 0$ car absence de matière équivaut à absence de courbure d'après l'équation d'Einstein). La contrainte scalaire correspond donc aux difféomorphismes "temporels" (par rapport à t), et donc $H^\mu \equiv (H, \vec{H})$ génère l'invariance par difféomorphisme sur l'ensemble de l'espace-temps. On vérifie bien là que cette invariance n'est pas brisée par notre feuilletage.

L'étape suivante est donc la quantification, qui revient à promouvoir la métrique q_{ab} et son conjugué π^{ab} en opérateurs \hat{q}_{ab} et $\hat{\pi}^{ab}$, avec les relations de commutations suivantes (qui proviennent, comme on l'a expliqué, des crochets de Poisson) :

$$[\hat{q}_{ab}(t, \vec{x}), \hat{\pi}^{cd}(t, \vec{y})] \equiv i\hbar (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathbb{1}, \quad (4.6)$$

puis à appliquer les contraintes. Mais avant d'arriver à cette dernière étape, on se heurte à un problème grave : pour définir un espace de Hilbert, on doit définir un produit scalaire. Ici, la seule solution à notre disposition est formellement :

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \int dq \psi(q_{ab})^* \phi(q_{ab}), \quad (4.7)$$

mais il n'existe *pas* de mesure dq sur l'ensemble des métriques inéquivalentes par difféomorphisme. L'espace de Hilbert est donc mal défini, et on peut voir, si l'on pousse le développement plus loin en ignorant ce fait, que cela ne s'arrange pas après avoir imposé les contraintes.

L'approche qui vient d'être décrite est celle qui a été suivie par Arnowitt, Deser et Misner : c'est la théorie dite ADM. Comme on a pu le voir, elle pose un certain nombre de problèmes. La gravité quantique à boucle (LQG) se base sur une approche très similaire où ces problèmes disparaissent, et ce en partie grâce à un meilleur choix de variables.

4.2 Une autre approche : la gravité quantique à boucle

4.2.1 Le formalisme Hamiltonien

Le processus de quantification canonique donne des résultats potentiellement très différents selon les variables qu'on choisi comme étant *canoniques*. La première différence avec

13. On emprunte au jargon des physiciens des particules le terme *on-shell*. Par exemple, dire qu'une quantité s'annule *on-shell* signifie qu'elle est nulle *une fois les équations du mouvement appliquées*, soit dans la restriction de l'espace des phases qui correspond aux trajectoires physiques.

la théorie ADM est qu'on va utiliser le formalisme de la tétrade e , étudié au début de ce rapport. Comme on l'a vu, l'action de la gravité s'y ré-écrit comme :

$$S_{\text{EH}} = \int e e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} d^4x. \quad (4.8)$$

Ensuite, on considère qu'à ce niveau, tétrade e et connexion ω sont deux objets *indépendants*. Pour ce faire, on choisit $F_{\mu\nu}^{IJ} = F_{\mu\nu}^{IJ}(\omega)$. La variation de l'action par rapport à la connexion donne alors Eq. 2.22, qui permet d'exprimer ω en fonction de e , et de retrouver la relativité générale telle qu'on la connaît : rien de nouveau donc. L'action vue sous cet angle a l'avantage de ne faire intervenir que des dérivées premières de e et ω , et est polynomiale en ces deux variables, ce qui devrait rendre la quantification plus agréable. On remarque alors qu'il est possible de rajouter un terme supplémentaire, qui possède les mêmes symétries et qui mène aux mêmes équations du mouvement (car il s'annule si on exprime $\omega = \omega(e)$ dans un espace-temps sans torsion). L'action alors obtenue est appelée *action de Holst* [6] :

$$S[e, \omega] = \int e e_I^\mu e_J^\nu \left[F_{\mu\nu}^{IJ} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} \right] d^4x, \quad (4.9)$$

où γ est un coefficient sans dimension qu'on appelle *paramètre de Immirzi* et dont la valeur est arbitraire : il n'apparaît pas dans les solutions classiques (mais il va jouer un rôle important dans le formalisme quantique, comme on va le voir).

Pour trouver une formulation Hamiltonienne, on est encore une fois obligé de passer par la décomposition 3+1. Comme on l'a vu, on a donc trois objets : la triade e_a^i , le shift N^a et le lapse N , mais il faut aussi ajouter la connexion ω_a^{ij} , comme on l'a considérée indépendante de e (et donc de N et N^a). Si l'on tente de quantifier le système ainsi décrit, on se heurtera à plusieurs problèmes pour deux raisons : la première est l'apparition d'au moins une nouvelle contrainte, liée à la symétrie Lorentzienne du repère inertiel, et la seconde est le fait que l'on considère la tétrade et la connexion comme deux objets indépendants. Ces deux faits mènent en réalité à l'apparition de contraintes de seconde classe, qui compliquent beaucoup la quantification.

Il existe heureusement une astuce, qui consiste simplement à faire un changement de variables [5]. Au lieu de considérer la tétrade e_a^i et la connexion ω_a^{ij} , on va travailler avec la *triade (inverse) densifiée*¹⁴ :

$$E_i^a \equiv e e_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k, \quad (4.10)$$

et la *connexion d'Ashtekar-Barbero* :

$$A_a^i \equiv \gamma \omega_a^{0i} + \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk}, \quad (4.11)$$

qui forment les *variables d'Ashtekar* (le lapse et le shift vont rester, comme dans la théorie ADM, des multiplicateurs de Lagrange, et ne poseront donc pas de problème). L'action de Holst peut se ré-exprimer uniquement en fonction de ces deux variables, du shift et du lapse comme [11] :

$$S[A_a^i, E_i^a, N, N^a] = \frac{1}{\gamma} \int dt \int d^3x \left[\dot{A}_a^i E_i^a - A_0^i G_i - N H - N^a H_a \right], \quad (4.12)$$

14. Attention : le déterminant e est ici, et dans toute ce qui suit, celui de la *triade*, et non celui de la tétrade.

où l'on voit immédiatement l'intérêt des variables d'Ashtekar : elles sont simplement *conjuguées* l'une de l'autre¹⁵ :

$$\{A_a^i(t, \vec{x}), E_j^b(t, \vec{y})\} = \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.13)$$

Les contraintes prennent quant à elles une forme moins sympathique, mais on peut effectivement montrer qu'elles sont de première classe :

$$G_i \equiv D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ji}^k A_a^j E_k^a, \quad (4.14)$$

$$H \equiv \left[F_{ab}^j - (\gamma^2 + 1) \epsilon^j_{mn} K_a^m K_b^n \right] \frac{\epsilon_j^{kl} E_k^a E_l^b}{\det(E)} + \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} G^i \partial_a \frac{E_i^a}{\det(E)}, \quad (4.15)$$

$$H_a \equiv \frac{1}{\gamma} F_{ab}^j E_j^b - \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} K_a^i G_i. \quad (4.16)$$

Cette action est très similaire à celle qu'on avait obtenue dans la théorie ADM, où les variables conjuguées (q_{ab}, π^{ab}) ont été remplacées par (A_a^i, E_i^a) : de fait, on identifie directement H et H^a comme étant les contraintes qui génèrent les invariances par difféomorphisme. La nouvelle contrainte G_i est la contrainte liée à la symétrie de jauge Lorentzienne (dans le jargon des théories de jauges, on dit alors qu'il s'agit d'une *contrainte de Gauss*). Fait remarquable : le groupe de jauge correspondant à cette contrainte n'est *pas* le groupe de Lorentz. Pour le voir, on considère sa forme intégrale :

$$G(\vec{\Lambda}) \equiv \int d^3x G_i(\vec{x}) \Lambda^i(\vec{x}), \quad (4.17)$$

où $\Lambda^i(\vec{x})$ est un champ de vecteur test, et on montre (voir App. A) que :

$$\left\{ -\frac{1}{\gamma} G(\vec{\Lambda}_1), -\frac{1}{\gamma} G(\vec{\Lambda}_2) \right\} = -\frac{1}{\gamma} G(\vec{\Lambda}_1 \wedge \vec{\Lambda}_2), \quad (4.18)$$

où $(\vec{\Lambda}_1 \wedge \vec{\Lambda}_2)^i \equiv \epsilon^i_{jk} \Lambda_1^j \Lambda_2^k$. On reconnaît alors l'équation de structure de l'algèbre de Lie du groupe SU(2) (et aussi SO(3), vu qu'ils ont la même algèbre de Lie). Mais pourquoi ne retrouve-t-on pas le groupe de Lorentz SO(3,1) ? En réalité, la connexion d'Ashtekar-Barbero n'est pas une connexion sur le groupe de Lorentz (c'est le rôle de ω_μ^{IJ})¹⁶ : elle n'est qu'une variable auxiliaire, dont la seule utilité est de résoudre partiellement les contraintes de façon à ce qu'elles deviennent de première classe. Il n'y a pas *a priori* d'argument physique qui permette d'interpréter ce résultat.

Pour finir, notons que l'espace des phases défini par (A_a^i, E_i^a) est plus grand que celui qu'on avait initialement avec (q_{ab}, π^{ab}) . Ce n'est qu'en imposant la contrainte de Gauss $G_i = 0$ qu'on retrouve l'espace des phases de la relativité générale.

15. On pourra noter une forte analogie avec l'électromagnétisme, où le champ électrique E^a et le potentiel vecteur A_a sont canoniquement conjugués l'un de l'autre. C'est pourquoi on trouve parfois dans la littérature du vocabulaire emprunté à la théorie de Maxwell, en particulier le terme de *champ électrique* pour la triade densifiée.

16. Dans le cas particulier où $\gamma = i$, on peut en fait identifier ce groupe SU(2) comme étant le sous-groupe auto-dual du groupe de Lorentz, et c'est en ces termes qu'Ashtekar a introduit ses variables initialement. Ce choix simplifie d'ailleurs grandement les expressions des contraintes, mais les variables deviennent alors complexes, ce qui pose quelques soucis supplémentaires pour la quantification. Par la suite, on considérera γ réel et strictement positif.

4.2.2 Préparation à la quantification : l'algèbre holonomie-flux

En appliquant le processus de quantification canonique, on change les variables conjuguées en opérateurs \hat{A}_a^i et \hat{E}_i^a tels que leur commutateur soit :

$$\left[\hat{A}_a^i, \hat{E}_i^a \right] = i\hbar \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.19)$$

et donc qu'une représentation possible est :

$$\hat{A}_a^i \equiv A_a^i \quad \text{et} \quad \hat{E}_i^a \equiv -i\hbar \gamma \frac{\delta}{\delta A_a^i}. \quad (4.20)$$

Ces deux opérateurs vont nous poser quelques soucis par la suite. On va en réalité travailler plutôt avec une version régularisée du crochet de Poisson Eq. 4.13 (et donc du commutateur ci-dessus). Cette étape n'est pas strictement nécessaire pour procéder à la quantification, mais nous aurons besoin des grandeurs que l'on va définir ici par la suite. Pour cela, on va définir des formes intégrales pour les variables canoniques A_a^i et E_i^a . Il se trouve que la première est une 1-forme, et la seconde une 2-forme. De fait, au lieu de les intégrer sur tout le feuilletage (comme on avait fait avec les contraintes), on va choisir d'intégrer A_a^i sur une *courbe* γ , et E_i^a sur une *surface* S .

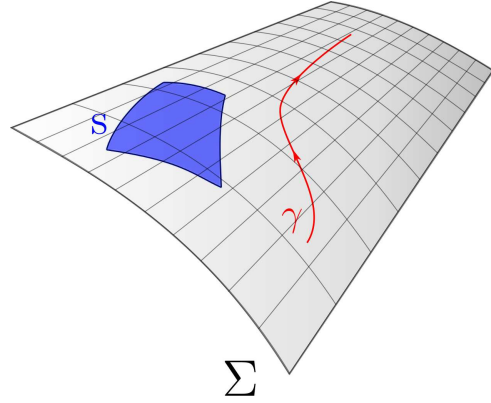


FIGURE 4 – On définit l'holonomie sur un chemin γ (en rouge), et le flux à travers une surface S (en bleu), toutes deux étant contenues dans un feuilletage de l'espace-temps Σ (qui est un volume, mais qu'on représente ici comme une surface).

Pour la connexion, on définit alors l'*holonomie* sur un chemin γ comme :

$$\mathbf{h}_\gamma[A] \equiv \mathcal{P} \exp \left[\int_0^1 A_a^i(\vec{x}(s)) \tau_i \frac{dx^a(s)}{ds} ds \right] \equiv \mathcal{P} \exp \left[\int_0^1 \mathbf{A}_\gamma(s) ds \right], \quad (4.21)$$

où les τ_i sont les générateurs infinitésimaux de $SU(2)$, et où le chemin γ est paramétré par ses coordonnées $\vec{x}(s)$ ($s \in [0, 1]$) dans le feuilletage Σ . L'opérateur \mathcal{P} est un *opérateur d'ordre*, qui prend tout son sens quand on développe l'exponentielle en série : il impose que, dans l'intégrale, tous les \mathbf{A}_γ soient ordonnés selon leur position sur le chemin. Explicitement :

$$\mathbf{h}_\gamma[A] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < 1} \mathbf{A}_\gamma(s_1) \dots \mathbf{A}_\gamma(s_n) ds_1 \dots ds_n. \quad (4.22)$$

De par la présence des générateurs τ_i , l'holonomie est un élément de $SU(2)$. Elle possède un certain nombre de propriétés intéressantes dont on va avoir besoin par la suite. En particulier, le produit de deux holonomies \mathbf{h}_{γ_1} et \mathbf{h}_{γ_2} est une autre holonomie définie sur le chemin formé par l'union des deux chemins γ_1 et γ_2 :

$$\mathbf{h}_{\gamma_1}[A] \mathbf{h}_{\gamma_2}[A] = \mathbf{h}_{\gamma_1 \cup \gamma_2}[A]. \quad (4.23)$$

Sous l'action d'un changement de jauge $\mathbf{g} \in \text{SU}(2)$, seuls les points de départ $\vec{x}(0)$ et d'arrivée $\vec{x}(1)$ de l'holonomie sont modifiés, et elle se transforme donc comme :

$$\mathbf{h}_\gamma^{\mathbf{g}}[A] = \mathbf{g}_{\vec{x}(0)} \mathbf{h}_\gamma[A] \mathbf{g}_{\vec{x}(1)}^{-1}. \quad (4.24)$$

L'action d'un difféomorphisme sur la connexion se traduit sur l'holonomie par l'inverse de ce même difféomorphisme appliqué au chemin :

$$\mathbf{h}_\gamma[\phi A] = \mathbf{h}_{\phi^{-1}\gamma}[A]. \quad (4.25)$$

Enfin, la dérivée fonctionnelle de l'holonomie par rapport à la connexion vaut :

$$\frac{\delta \mathbf{h}_\gamma[A]}{\delta A_a^i(\vec{x})} = \frac{1}{2} \begin{cases} \partial_s x^a(0) \tau_i \mathbf{h}_\gamma[A] & \text{si } \vec{x} = \vec{x}(0), \\ \partial_s x^a(1) \mathbf{h}_\gamma[A] \tau_i & \text{si } \vec{x} = \vec{x}(1), \\ 2 \partial_s x^a(s) \mathbf{h}_{\gamma_1}[A] \tau_i \mathbf{h}_{\gamma_2}[A] & \text{si } \vec{x} = \vec{x}(s) \text{ avec } s \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.26)$$

où $\gamma_1 \equiv \gamma(0, s)$ et $\gamma_2 \equiv \gamma(s, 1)$, de sorte que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, et on notera au passage que l'holonomie sur un chemin nul est simplement égale à l'identité dans $\text{SU}(2)$. Physiquement parlant, l'holonomie est l'objet qui permet de transporter parallèlement tout spineur de $\text{SU}(2)$ le long d'une courbe γ , sous l'effet de la connexion A_a^i . En tant que fonctionnelle de la courbe γ , elle ne fait perdre aucune information sur le contenu physique de la connexion.

Pour la tétrade densifiée, on définit plus simplement son *flux* à travers une surface S comme :

$$E_i(S) \equiv \int_S n_a(\sigma_1, \sigma_2) E_i^a(\vec{x}(\sigma_1, \sigma_2)) d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (4.27)$$

où $\vec{n}(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_1} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma_2}$ est la normale à la surface S au point \vec{x} repéré par les coordonnées (σ_1, σ_2) .

L'ensemble de ces deux grandeurs forme une nouvelle algèbre qu'on appelle l'*algèbre holonomie-flux*. C'est la façon la plus simple et la plus naturelle de régulariser le crochet de Poisson des variables canoniques.

4.2.3 Quantification, étape 1 : l'espace de Hilbert cinématique

Nous abordons maintenant la quantification à proprement parler. Notre premier objectif est de construire un espace de Hilbert *cinématique*, dans lequel aucune des contraintes n'est respectée. Le premier problème que l'on a à régler est celui qui nous a bloqué dans l'approche ADM : la définition d'une mesure d'intégration sur les états quantiques. Contrairement à une théorie des champs usuelle, nous n'avons pas à notre disposition de *métrique de fond* (*background metric*) comme celle de Minkowski. Nous devons donc trouver une mesure sur l'espace des connexions sans faire référence à une métrique.

La solution à ce problème est apportée par les fonctions dites *cylindriques*, qui ne dépendent que des holonomies \mathbf{h}_{e_i} définies sur un ensemble fini de chemins $\{e_i\}$. Une telle fonction est alors définie sur un *graphe* Γ qui contient l'ensemble de ces L chemins, qu'on appelle alors les *liens* du graphe. Si f est une fonction cylindrique, alors on notera de manière générale :

$$f(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A]) \equiv \psi_{(\Gamma, f)}[A] \equiv \langle A | \psi_{(\Gamma, f)} \rangle. \quad (4.28)$$

Pour faire de cet espace de fonctions un véritable espace de Hilbert, il ne manque plus qu'un produit scalaire. C'est là qu'apparaît tout l'intérêt de l'holonomie : celle-ci étant un

élément de $SU(2)$, on peut utiliser la *mesure de Haar* $d\mu(\mathbf{h})$ de ce groupe pour l'intégrer. Le produit scalaire de deux fonctions sur un même graphe est alors défini par :

$$\langle \psi_{(\Gamma,f)} | \psi_{(\Gamma,g)} \rangle = \int \left[\prod_i d\mu(\mathbf{h}_{e_i}) \right] f(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A])^* g(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A]). \quad (4.29)$$

On peut facilement étendre sa définition aux fonctions sur des graphes Γ_1 et Γ_2 différents en considérant le graphe $\Gamma_3 \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et en intégrant simplement sur toutes les holonomies définies dans Γ_3 . On forme alors un premier espace de Hilbert \mathcal{H}_Γ , qui contient toutes les fonctions cylindriques définies sur un même graphe Γ et, pour avoir l'espace de Hilbert cinématique que l'on cherchait, il ne reste qu'à sommer sur tous les graphes possibles (au sein d'une même feuille d'espace-temps Σ) :

$$\mathcal{H}_{kin} \equiv \bigoplus_{\Gamma \in \Sigma} \mathcal{H}_\Gamma. \quad (4.30)$$

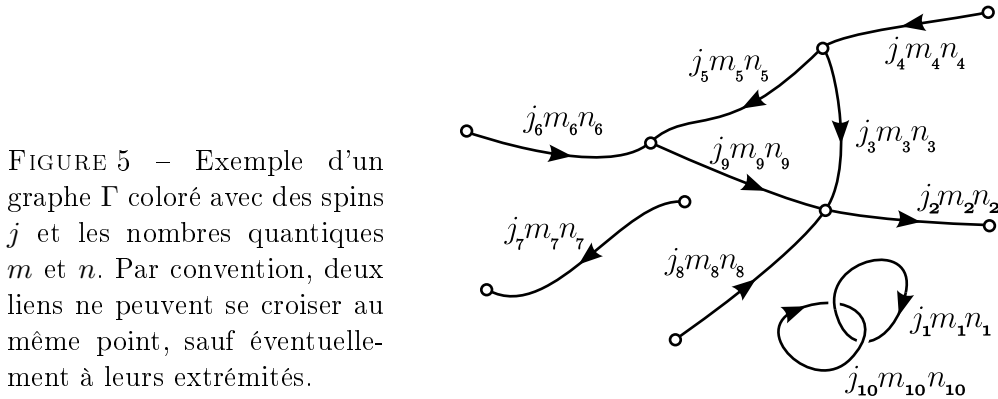
On va ensuite avoir besoin d'une base orthonormée sur cet espace. C'est le théorème de Peter-Weyl, généralisation de la transformée de Fourier, qui va nous la fournir. Ce théorème nous dit en effet que toute fonction $f(\mathbf{g})$ où \mathbf{g} appartient à un groupe compact G peut être décomposée sur les représentations irréductibles unitaires du groupe G . Dans notre cas, ces représentations sont les *matrices de Wigner* :

$$\mathcal{D}_{m,n}^j(\mathbf{h}_{e_i}[A]) \equiv \langle A | \Gamma, j, m, n \rangle_{e_i}, \quad (4.31)$$

où $|\Gamma, j, m, n\rangle_{e_i}$ est un *état de lien* associé au graphe Γ . Ainsi, toute fonction cylindrique peut se décomposer comme :

$$|\psi_{(\Gamma,f)}\rangle = \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} f_{\{m_i, n_i\}}^{\{j_i\}} \bigotimes_i |\Gamma, j_i, m_i, n_i\rangle_{e_i} \equiv \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} f_{\{m_i, n_i\}}^{\{j_i\}} |\Gamma, \{j_i, m_i, n_i\}\rangle, \quad (4.32)$$

où les $|\Gamma, \{j_i, m_i, n_i\}\rangle$ forment une base de \mathcal{H}_Γ . On peut visualiser ces états de base comme étant une *coloration* du graphe Γ : à chaque lien du graphe on associe une représentation irréductible de $SU(2)$ (un *spin* j) et deux nombres quantiques m et $n \in [-j, j]$, voir Fig. 5. Il faut de plus préciser sur le graphe l'*orientation* des liens que l'on choisit (qui est en



réalité le sens de parcours choisi pour les holonomies : si on permute l'orientation d'un lien, cela revient à changer l'holonomie correspondante en son inverse). Enfin, notons qu'il est techniquement possible de prendre un des j égal à zéro : l'holonomie correspondante sera alors simplement égale à 1 (c'est la représentation triviale). Tout se passe alors comme si le lien associé à ce spin n'était pas présent, et donc que l'on a un autre graphe. Dans ce qui suit, nous considérerons toujours $j > 0$.

4.2.4 Quantification, étape 2 : l'invariance de jauge, les *spin networks*

On a construit un espace de Hilbert très vaste, contenant toutes les fonctions cylindriques possibles. Seulement, nous avons toujours trois contraintes à imposer à ces fonctions, qui vont réduire la taille de cet espace.

La première à laquelle on va s'attaquer est la contrainte de jauge. Elle va imposer aux états de l'espace de Hilbert d'être *invariants de jauge*. Autrement dit, pour une fonction cylindrique f :

$$f(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A]) = f(\mathbf{h}_{e_1}^{\mathbf{g}}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}^{\mathbf{g}}[A]). \quad (4.33)$$

où, comme on l'a vu, $\mathbf{h}^{\mathbf{g}}$ est une holonomie qui a subi une transformation de jauge $\mathbf{g} \in \text{SU}(2)$. On sait, d'après les propriétés de l'holonomie, que celle-ci se transforme de manière bien particulière : $\mathbf{h}^{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_0 \mathbf{h} \mathbf{g}_1^{-1}$, où \mathbf{g}_0 et \mathbf{g}_1 sont deux éléments de $\text{SU}(2)$ distincts, qui correspondent respectivement au début et à la fin du chemin sur lequel est défini \mathbf{h} . La manière la plus simple de construire des fonctions invariantes sous cette transformation est de faire une *moyenne sur le groupe* :

$$f_0(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A]) = \int \left[\prod_a d\mu(\mathbf{g}_a) \right] f(\mathbf{g}_{0,e_1} \mathbf{h}_{e_1}[A] \mathbf{g}_{1,e_1}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{0,e_L} \mathbf{h}_{e_L}[A] \mathbf{g}_{1,e_L}^{-1}), \quad (4.34)$$

où l'on a introduit des éléments \mathbf{g} de $\text{SU}(2)$ au début et à la fin de chaque holonomie. Si certaines holonomies se rejoignent en un même point, alors elles partagent le même élément du groupe \mathbf{g} : cela revient en réalité à introduire un élément de $\text{SU}(2)$ pour chaque *noeud* du graphe (représentés par des petits cercles vides sur le graphe Fig. 5)¹⁷. En décomposant la fonction f sur la base $|\Gamma, \{j_i, m_i, n_i\}\rangle$, on a :

$$f_0(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_L}[A]) = \int \left[\prod_a d\mu(\mathbf{g}_a) \right] \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} f_{\{j_i, m_i, n_i\}} \prod_i \mathcal{D}_{m_i, n_i}^{j_i}(\mathbf{g}_{0, e_i} \mathbf{h}_{e_i}[A] \mathbf{g}_{1, e_i}^{-1}). \quad (4.35)$$

On utilise alors la loi de groupe $\mathcal{D}_{m, n}^j(\mathbf{g} \mathbf{h}) = \mathcal{D}_{m, \alpha}^j(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{\alpha, n}^j(\mathbf{h})$, ainsi que la propriété suivante des matrices de Wigner :

$$\mathcal{D}_{m, n}^j(\mathbf{g}^{-1}) = \mathcal{D}_{m, n}^j(\mathbf{g})^{-1} = \mathcal{D}_{n, m}^j(\mathbf{g})^* = (-1)^{n-m} \mathcal{D}_{-n, -m}^j(\mathbf{g}), \quad (4.36)$$

pour exprimer :

$$\mathcal{D}_{m_i, n_i}^{j_i}(\mathbf{g}_{0, e_i} \mathbf{h}_{e_i}[A] \mathbf{g}_{1, e_i}^{-1}) = (-1)^{n_i - \beta_i} \mathcal{D}_{m_i, \alpha_i}^{j_i}(\mathbf{g}_{0, e_i}) \mathcal{D}_{\alpha_i, \beta_i}^{j_i}(\mathbf{h}_{e_i}[A]) \mathcal{D}_{-n_i, -\beta_i}^{j_i}(\mathbf{g}_{1, e_i}).$$

On voit que, si un lien i va du noeud a au noeud b du graphe, en notant $m_i \equiv m_{ab}$, $-n_i \equiv m_{ba}$, $\alpha_i = \alpha_{ab}$, $-\beta_i \equiv \alpha_{ba}$, $j_i = j_{ab} = j_{ba}$, alors on peut regrouper ensemble les matrices associées à un même élément \mathbf{g} de $\text{SU}(2)$ pour avoir, en chaque noeud a un *projecteur* :

$$\mathcal{P}_{a, \{m_{ab}, \alpha_{ab}\}}^{\{j_{ab}\}} \equiv \int d\mu(\mathbf{g}) \prod_{b \in v(a)} \mathcal{D}_{m_{ab}, \alpha_{ab}}^{j_{ab}}(\mathbf{g}), \quad (4.37)$$

17. On remarque en passant que l'holonomie sur une *boucle* est automatiquement invariante de jauge. L'exemple le plus simple de fonction cylindrique invariante de jauge est donc une *boucle de Wilson*, définie comme la trace de la matrice de Wigner associée à une telle holonomie :

$$W^j(\mathbf{h}[A]) = \text{Tr}[\mathcal{D}_{m, n}^j(\mathbf{h}[A])].$$

La gravité quantique à boucle tire son nom de tels objets : elle a initialement été formulée en ne faisant intervenir que ces boucles de Wilson, puis a été généralisée sur des graphes plus complexes.

où $b \in v(a)$ signifie " b voisin de a " sur le graphe. Rendre un état invariant de jauge revient donc simplement à introduire un tel projecteur en chaque noeud du graphe (à un facteur $(-1)^{\sum_i n_i - \beta_i}$ près). En revenant à la notation plus concise des vecteurs en bra et ket, un état invariant de jauge est de la forme :

$$|\psi_{(\Gamma, f)}^0\rangle = \sum_{\{j_i, m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i\}} f_{\{m_i, n_i\}}^{\{j_i\}} (-1)^{\sum_i n_i - \beta_i} \left[\prod_a \mathcal{P}_a^{\{j_{ab}\}} \right] |\Gamma, \{j_i, \alpha_i, \beta_i\}\rangle . \quad (4.38)$$

Étudions ces objets plus en détail en regardant quelques cas particuliers. Commençons par un noeud de valence 1 (la *valence* d'un noeud est le nombre de lien qui y sont connectés). On a :

$$\mathcal{P}_{m, \alpha}^j = \int d\mu(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m, \alpha}^j(\mathbf{g}) = \frac{1}{2j+1} \delta_{j,0} \delta_{m,0} \delta_{\alpha,0} = 0 , \quad (4.39)$$

car on a supposé $j > 0$: ce projecteur est identiquement nul. Les graphes invariants de jauge ne contiennent donc pas de noeud monovalent (ou s'ils en contiennent, ceux-ci n'ont aucune influence sur les résultats). Passons au cas de valence 2. Le projecteur est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2}^{j_1, j_2} &= \int d\mu(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m_1, \alpha_1}^{j_1}(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m_2, \alpha_2}^{j_2}(\mathbf{g}) \\ &= \frac{1}{2j_1+1} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, -m_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2} (-1)^{m_2 - \alpha_2} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Celui-ci revient à supprimer le noeud et à introduire un nouveau lien, union des deux premiers. Là encore, l'invariance de jauge simplifie le graphe en combinant les holonomies qui se recoupent sur des noeuds bivalents. Les choses intéressantes commencent réellement avec les noeuds de valence 3. En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m_1, m_2, m_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{j_1, j_2, j_3} &= \int d\mu(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m_1, \alpha_1}^{j_1}(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m_2, \alpha_2}^{j_2}(\mathbf{g}) \mathcal{D}_{m_3, \alpha_3}^{j_3}(\mathbf{g}) \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (4.41)$$

où les $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ sont les *symboles 3j de Wigner*, introduits initialement en mécanique quantique pour la théorie du moment cinétique [4]. Ce sont, à quelques facteurs et signes près, les *coefficients de Clebsh-Gordan* qui apparaissent dans la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $SU(2)$. Ainsi, ce projecteur est identiquement nul si les trois j ne respectent pas les inégalités triangulaires ($j_3 \in [|j_1 - j_2|, j_1 + j_2]$, etc.), si leur somme est demie-entière, ou encore si $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$. On voit alors que les parties en m_i et α_i se séparent : ce projecteur peut être écrit comme le produit de deux termes, un qui se contracte avec les coefficients f_{\dots} , et un autre avec les états graphe $|\Gamma, \dots\rangle$, pour les rendre tous deux invariants de jauge.

Pour les cas de valence supérieure, ce ne sont plus les symboles 3j que l'on obtient, mais une somme d'objets plus complexes, où chaque terme de la somme suffit à implémenter l'invariance de jauge. Le processus de moyenne sur le groupe choisit une combinaison particulière de ces termes, mais rien ne nous empêche d'en choisir une autre. Qui plus est, on retrouve de manière générale la séparation entre les indices m et α (propriété qui découle du fait que \mathcal{P} soit un projecteur). On écrit donc formellement :

$$\mathcal{P}_a^{\{j_{ab}\}} \equiv \sum_u i_{a,u}^{\{j_{ab}\}} i_{a,u}^{\{j_{ab}\}} , \quad (4.42)$$

où les $i_{a,u}$ sont ce qu'on appelle des *intertwiners*¹⁸ du noeud a (dans le cas trivalent, il s'agit par exemple d'un symbole $3j$). La fonction cylindrique s'exprime alors comme :

$$|\psi_{(\Gamma,f)}^0\rangle \equiv \sum_{\{j_i, i_{a,u}\}} \hat{f}_{\{i_{a,u}\}}^{\{j_i\}} |\Gamma, \{j_i, i_{a,u}\}\rangle, \quad (4.43)$$

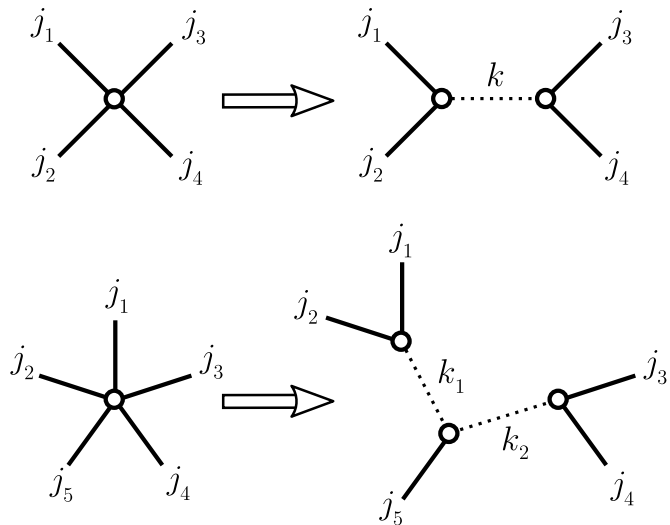
où l'on a rangé les sommes sur m_i et n_i dans les coefficients \hat{f} , ainsi que les sommes sur α_i et β_i dans les kets $|\Gamma, \dots\rangle$, avec leurs intertwiners respectifs. Les coefficients \hat{f} ne sont pas très importants, puisqu'on peut les choisir comme bon nous semble (on aurait alors simplement une autre fonction f'). En revanche, les états $|\Gamma, \{j_i, i_{a,u}\}\rangle$ forment une base de l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes invariantes de jauge, et ils implémentent donc directement la contrainte de Gauss. On les appelle les *états de spin network* (ou *réseau de spins*). Un tel état est complètement défini par la donnée d'un graphe Γ , d'une coloration de chaque lien de ce graphe par un spin j , ainsi que le choix d'un intertwiner pour chaque noeud.

Il existe cependant une autre façon de construire ces intertwiners, bien plus simple à visualiser. Nous allons décrire ici la méthode générale, le lecteur pourra se référer à [13] pour une présentation plus rigoureuse. On connaît bien l'unique intertwiner possible pour un noeud trivalent : c'est le symbole $3j$. L'idée est donc de *casser* les noeuds du graphe pour faire apparaître de nouveaux liens dits *virtuels* (à la manière des particules virtuelles en théorie des champs) de façon à n'avoir que des noeuds trivalents. Quelques exemples sont donnés Fig. 6. Un intertwiner est alors uniquement déterminé par le choix du spin que l'on associe à chaque lien virtuel : en règle générale, pour un noeud n -valent, un intertwiner est complètement déterminé par la donnée de $n - 3$ spins. Par exemple, l'intertwiner de spin k pour le noeud 4-valent s'écrit, à une constante près :

$$i_k^{j_1, j_2, j_3, j_4}_{m_1, m_2, m_3, m_4} \sim \sum_n \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Cette construction se retrouve naturellement quand on cherche à calculer explicitement l'intégrale définissant le projecteur \mathcal{P} et en se servant des propriétés des produits de matrices de Wigner.

FIGURE 6 – Exemples de liens virtuels pour un noeud 4-valent et 5-valent. Il existe en général plusieurs valeurs de spins virtuels possibles, sélectionnées par les conditions de Clebsh-Gordan en chacun des noeuds virtuels. De même, il existe plusieurs décompositions possibles, qui donneront simplement naissance à différentes bases de l'espace des intertwiner.



18. Aussi appelés *entrelaceurs* dans la langue de Molière.

En résumé, une base de l'espace de Hilbert invariant de jauge sur un graphe \mathcal{H}_Γ^0 est donné par les états de *spin networks* $|\Gamma, \{j_i, k_u\}\rangle$, où l'on attribue un spin j_i à chaque lien et $n - 3$ spins virtuels k_u à chaque noeud n -valent.

4.2.5 Entracte : les opérateurs géométriques, aire et volume

Nous avons donc réussi à trouver et à définir clairement un espace de Hilbert dans lequel la contrainte de Gauss sur l'invariance de jauge est respectée. Le processus de quantification n'en est pas pour autant terminé : il reste les contraintes sur les difféomorphismes à traiter. Néanmoins, on peut faire une pause ici et s'intéresser à quelques unes des propriétés intéressantes des *spin networks* que l'on vient d'introduire. En effet, on peut définir à ce stade deux *opérateurs géométriques* sur cet espace de Hilbert : l'opérateur d'aire et l'opérateur de volume.

Commençons par l'opérateur d'aire, le plus simple des deux. Classiquement, l'aire d'une surface en relativité générale est donnée par Eq. 2.27. Dans le formalisme 3+1, on peut ré-exprimer cette grandeur en fonction de la triade densifiée E_i^a comme :

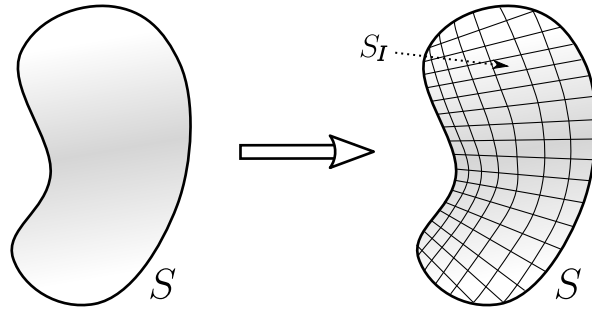
$$A = \int_S \sqrt{E_i^a E^{bi} n_a n_b} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (4.45)$$

où n_a est la normale à la surface paramétrée par les deux coordonnées σ_1 et σ_2 . On veut maintenant trouver un opérateur quantique associé à cette grandeur, l'idée étant d'essayer d'abord de faire intervenir les holonomie et flux qu'on s'est donné la peine de définir auparavant, puis d'utiliser leur représentation quantique. Il existe en effet une régularisation de l'expression ci-dessus faisant intervenir le flux de la triade densifiée : on décompose d'abord la surface S en N petites cellules S_I , voir Fig. 7, puis on ré-écrit l'intégrale comme étant la limite d'une somme :

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \quad \text{avec :} \quad A_N = \sum_{I=1}^N \sqrt{E_i^a(S_I) E^i(S_I)}, \quad (4.46)$$

où $E_i(S_I)$ est le flux de E_i^a à travers la cellule S_I , défini précédemment Eq. 4.27.

FIGURE 7 – Classiquement, on décompose une surface S en cellules S_I (ici des carrés, mais la forme est arbitraire). La valeur de l'intégrale est alors obtenue pour une décomposition infinitésimale, soit pour $N \rightarrow \infty$.



Il ne reste alors plus qu'à promouvoir le flux E_i en un opérateur \hat{E}_i :

$$\hat{E}_i(S) = \int_S n_a(\sigma_1, \sigma_2) \hat{E}_i^a(\vec{x}) d\sigma_1 d\sigma_2 = -i\hbar\gamma \int_S n_a(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\delta}{\delta A_a^i(\vec{x})} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (4.47)$$

et donc l'opérateur d'aire est donné par :

$$\hat{A} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{A}_N \quad \text{avec :} \quad \hat{A}_N = \sum_{I=1}^N \sqrt{\hat{E}_i(S_I) \hat{E}^i(S_I)}. \quad (4.48)$$

Avant d'aller plus loin, il semble donc intéressant de regarder quelle est l'action de l'opérateur de flux sur un état de spin network. Considérons un lien particulier e du graphe et son holonomie associée $\mathbf{h}_e[A]$. Dans la représentation fondamentale (ou *adjointe*, ou *de définition*, ou *représentation* $1/2$, ...), la matrice de Wigner de l'holonomie est l'holonomie elle-même, et les générateurs τ_i sont les matrices de Pauli. D'après Eq. 4.26, on peut écrire :

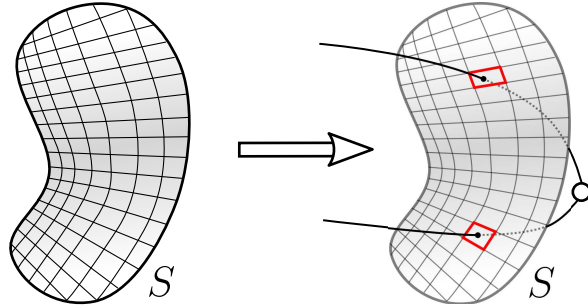
$$\hat{E}_i(S) \mathbf{h}_e[A] = -i\hbar\gamma \int_S n_a(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\delta \mathbf{h}_e[A]}{\delta A_a^i(\vec{x})} d\sigma_1 d\sigma_2 = \pm i\hbar\gamma \mathbf{h}_{e_1}[A] \tau_i \mathbf{h}_{e_2}[A], \quad (4.49)$$

si le lien e est coupé par S une fois et une seule. Les liens e_1 et e_2 sont alors les deux portions de e qui sont séparées par S (le signe \pm dépend de l'orientation relative du lien et de la surface). Quand on refait agir un autre flux contracté avec le premier, on a :

$$\begin{aligned} \hat{E}_i(S) \hat{E}^i(S) \mathbf{h}_e[A] &= -\hbar^2 \gamma^2 \mathbf{h}_{e_1}[A] \tau_i \tau^i \mathbf{h}_{e_2}[A] = -\hbar^2 \gamma^2 \mathbf{h}_{e_1}[A] \mathbf{C}^2 \mathbf{h}_{e_2}[A] \\ &= -\hbar^2 \gamma^2 \mathbf{C}^2 \mathbf{h}_{e_1}[A] \mathbf{h}_{e_2}[A] = -\hbar^2 \gamma^2 \mathbf{C}^2 \mathbf{h}_e[A], \end{aligned} \quad (4.50)$$

où \mathbf{C}^2 est l'opérateur de Casimir dans la représentation $1/2$: il commute donc avec tout élément de $SU(2)$, ce qui permet de recombinaison les deux holonomies et de montrer que l'holonomie initiale est *état propre* de l'opérateur $\hat{E}_i \hat{E}^i$. Ce résultat est généralisable pour une représentation de spin j quelconque, où le Casimir est $\mathbf{C}^2 = -j(j+1) \mathbb{1}$. Ce résultat étonnant se transpose directement à l'opérateur d'aire. Si l'on décompose la surface S de manière suffisamment fine de façon à ce que chaque cellule soit coupée par un lien au maximum, alors son action sur l'état de spin network est très simple : on n'a qu'à sommer les contributions de chaque cellule traversée, voir Fig. 8. Les états de spin network sont donc des *états propres* de l'opérateur d'aire ! Autrement dit, ils représentent une certaine géométrie quantique où les aires sont parfaitement définies, et correspondent aux liens du graphe.

FIGURE 8 – On décompose la surface jusqu'à ce que chaque cellule soit coupée par un lien au maximum. Alors, la valeur propre de l'opérateur d'aire est simplement la somme des contributions des cellules traversées, les autres n'intervenant pas.



L'aire associée à un lien de spin j est donc finalement :

$$A_j = \gamma \ell_P^2 \sqrt{j(j+1)}, \quad (4.51)$$

où ℓ_P est la longueur de Plank (ici dans les unités $16\pi G = 1$). Les spins j étant des entiers ou des demi-entiers, le spectre de l'opérateur d'aire est *discret* : au niveau quantique, les aires ne pourraient donc prendre qu'un certain ensemble de valeurs bien précises, et sont de plus restreintes à valoir au minimum $\gamma \ell_P^2$. En d'autres termes, on prévoit l'existence de *quanta d'aire*. C'est ce résultat surprenant qui a véritablement lancé la théorie.

Il est possible de définir par le même type de procédure un opérateur de volume. Plus précisément, on peut en définir au moins *deux*, en suivant des procédures de régularisation

différentes. La première méthode a été mise au point par Rovelli et Smolin, et la seconde par Ashtekar et Lewandowski. Le lecteur pourra se référer à la littérature [8] ainsi qu'au rapport de stage de François Collet, qui présente les deux approches plus en détail.

En résumé, on montre de la même façon que l'opérateur de volume n'agit que sur les *noeuds* du graphe, qu'il est également diagonal dans la base des spin networks et que ses valeurs propres dépendent de l'intertwiner que l'on a choisit pour décorer le noeud (et ce quelle que soit la procédure de régularisation empruntée). En revanche, l'expression exacte de son spectre est bien plus complexe que celle obtenue pour l'opérateur d'aire, mais celle-ci est néanmoins connue exactement.

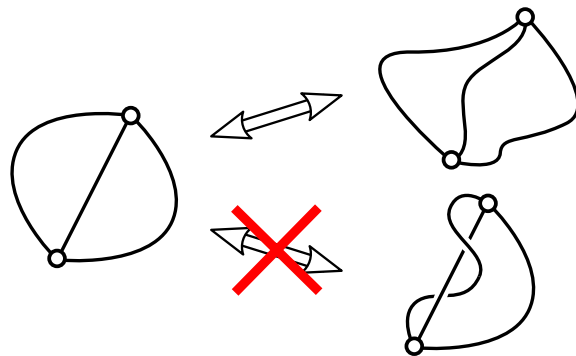
On se retrouve donc avec une description de la relativité qu'on pourrait qualifier de *sur réseau*¹⁹, où le réseau en question est symbolisé par un graphe dont les noeuds représentent les volumes, et les liens les surfaces qui les séparent. Mais il faut bien garder en tête que ce fait est un *résultat* de la quantification, et non une hypothèse de départ !

4.2.6 Quantification, étape 3 : l'espace de Hilbert dynamique

L'étude de cette dernière étape n'était pas initialement au programme de ce stage. Nous allons néanmoins en présenter ici un bref résumé en exposant les grandes idées mais sans rentrer dans le détail. Le lecteur trouvera dans la bibliographie les ressources nécessaires pour poursuivre la discussion.

Il nous reste deux contraintes à imposer. Celle sur les difféomorphismes "spaciaux", qui n'agissent que dans le feuilletage Σ , et celle sur les difféomorphismes "temporels" (aussi appelée contrainte Hamiltonienne). La première est relativement simple. Intuitivement, elle revient à ne considérer que les états qui sont invariants par difféomorphisme. On peut donc faire là aussi une moyenne sur le groupe, comme on l'a fait pour l'invariance de jauge, à ceci près que le groupe des difféomorphismes est non compact. Cette différence implique quelques subtilités, mais rien de fondamental. Au final, on peut montrer qu'imposer cette contrainte revient à ne considérer les états de spin networks que sur des *classes d'équivalence de graphes* sous l'action des difféomorphismes. Ces classes correspondent à ce qu'on appelle des spin networks *noués* (*knotted*). Une illustration est donnée Fig. 9.

FIGURE 9 – Un difféomorphisme peut changer complètement l'apparence d'un graphe, mais il ne pourra jamais *nouer* ou *dénouer* les liens entre eux. On définit ainsi les classes d'équivalence de graphe.



Ainsi, la façon dont on plonge le graphe dans Σ n'a plus d'importance, seule sa structure compte : le nombre de lien, la valence de chaque noeud, etc. Deux graphes sont donc jugés équivalents s'il est possible de passer continûment de l'un à l'autre sans faire se croiser les liens. On voit par exemple qu'il est impossible de le faire pour le graphe du bas de Fig. 9 : il est donc non équivalent au premier. L'étude de ce type de problème est une branche

19. ... quand le graphe le permet ! Commenter interpréter classiquement une boucle ? Ou un noeud trivalent ?

des mathématiques qu'on appelle la *théorie des noeuds*. Nous n'entrerons pas plus dans les détails ici.

Les problèmes commencent réellement avec la contrainte Hamiltonienne. On peut en effet montrer que celle-ci peut se ré-écrire classiquement en fonction d'un certain nombre de crochets de Poisson, dont certains font intervenir le volume. Au niveau de la quantification, on a donc un premier problème : lequel des deux opérateurs de volume choisir ? On pourrait s'attendre à ce que les deux soient équivalents, mais ce n'est pas le cas : le calcul montre que l'action de la contrainte dépend malheureusement très fortement de ce choix. En revanche, dans les deux cas, elle n'agit que sur les noeuds du graphe, et revient à *créer* de nouveaux noeuds et de nouveaux liens autour de chaque noeud. On voit alors qu'il y a toute une catégorie de graphes qui respecte naturellement cette contrainte, indépendamment du choix de l'opérateur de volume : ceux qui ne possèdent *pas* de noeuds, donc les graphes qui ne sont formés que de *boucles*.

Quoi qu'il en soit, l'action réelle de cette contrainte sur un état quelconque reste mal comprise, et constitue le point faible de cette approche dite *canonique*. Depuis, d'autres formulations de la théorie ont vu le jour, en particulier le formalisme des *spin foams* (*mousses de spin*), qui part dans une direction différente dès le départ en cherchant une formulation par intégrale fonctionnelle. De nombreux résultats obtenus par quantification canonique ont ainsi été retrouvés, et une partie des problèmes rencontrés y disparaissent. De fait, l'approche par quantification canonique a été pour le moment mise de côté au profit des *spin foams*.

En somme, si l'aspect *cinématique* de cette approche est parfaitement maîtrisé, la dynamique est encore floue. Néanmoins, on s'attend à ce que les résultats intéressants mis en évidence précédemment (discrétisation de l'aire, etc.) soient toujours valides pour les états de l'espace de Hilbert dynamique.

Cette discussion termine donc notre présentation de la gravité quantique à boucle dans le formalisme canonique. Nous allons maintenant revenir un peu en arrière et nous concentrer sur la théorie cinématique, qui est la mieux comprise. Pour essayer d'en tirer des résultats, nous allons définir des états cohérents, et essayer de donner une interprétation semi-classique aux états de spin network.

5 États cohérents et *twisted geometries*

5.1 Motivation

On a vu dans la section précédente que les états de spin network ont une interprétation géométrique simple : les liens représentent des surfaces, et les noeuds des volumes. Il faut cependant noter que la géométrie ainsi définie est fondamentalement *quantique*, dans le sens où certaines grandeurs (aires et volumes par exemple) ont un spectre discret, mais aussi car elles ne commutent pas toutes ! Il est par exemple possible d'imaginer un *solide quantique*, comme le tétraèdre étudié dans [9], dont on ne peut pas connaître toutes les propriétés géométriques à la fois (en particulier pour cet exemple : longueurs et angles ne commutent pas).

Néanmoins, on sait qu'il n'en est pas ainsi à notre échelle. Si la théorie n'est pas trop farfelue, elle doit donc nous permettre de retrouver un monde tel qu'on le connaît dans une certaine limite dite "classique". On peut déjà régler le problème des spectres discrets : on a vu dans le cas l'opérateur d'aire que les quanta étaient d'ordre ℓ_P^2 , soit ridiculement petits. Il en va de même pour le volume, et on s'attend naturellement à ce que ce soit le cas pour toute autre grandeur, comme toujours en mécanique quantique. Ainsi, si l'on considère la limite $j_i \rightarrow \infty$, les quanta sont tellement petits qu'on peut considérer les spectres comme continus.

Pour étudier le problème des opérateurs non commutants, le meilleur outil à notre disposition est ce qu'on appelle les *états cohérents*. Il s'agit d'un ensemble d'états quantiques bien particuliers, que l'on construit de façon à ce que les distributions de toutes les observables soient piquées sur des valeurs imposées, et que les incertitudes relatives sur celles-ci tendent vers zéro dans la limite dite "semi-classique" des grands nombres quantiques. Dans notre cas, il s'agira de construire des états piqués dans l'espace des phases (A_a^i, E_i^a) , donc sur une géométrie classique de l'espace-temps. Un tel état sera alors une certaine combinaison impliquant *tous* les états de spin network, sur tous les graphes possibles. En pratique, il s'agit d'une tâche impossible à accomplir, principalement à cause de la somme sur tous les graphes. On se limitera donc par la suite à l'approximation d'un graphe Γ fixé.

L'espace de Hilbert associé à ce graphe \mathcal{H}_Γ ne représente évidemment pas la totalité de la théorie, mais seulement une partie des degrés de liberté qui lui sont associés. Pour obtenir un tout cohérent, il va falloir imposer des conditions qui permettront de reconstruire l'espace des phases entier, c'est à dire imposer en quelque sorte une *interpolation*²⁰. C'est ce pour quoi on introduit alors la notion de *twisted geometries* (ou *géométries tordues*), que l'on va maintenant présenter en s'inspirant de la description qui en est faite dans [18].

5.2 Introduction aux *twisted geometries*

Considérons l'espace de Hilbert invariant de jauge associé à un graphe \mathcal{H}_Γ^0 . De même que l'espace des phases (A_a^i, E_i^a) est associé à l'espace de Hilbert initial \mathcal{H} , on peut introduire un espace des phases S_Γ qui, une fois quantifié, mène directement à \mathcal{H}_Γ^0 . L'idée est donc de trouver un espace des phases "tronqué" qui décrive une géométrie classique de l'espace-temps sur un graphe Γ fixé. On a vu dans les sections précédentes qu'à chaque noeud du graphe correspond un volume, et qu'à chaque lien correspond une aire. On peut donc imaginer d'associer au graphe une *triangularisation* de l'espace-temps en terme de polyèdres. Pour ce faire, on associe un nombre réel $\mathcal{A}_{ab} = \mathcal{A}_{ba}$ à chaque lien, qui représente

20. De la même manière que, si on se donne quelques points appartenant au graphe d'une fonction, on peut définir une interpolation qui permet d'avoir une idée de l'allure du graphe entier. Celle-ci n'est pas unique, et doit être choisie. Mais il en existe certaines qui sont meilleures que d'autres...

l'aire classique (orientée), ainsi qu'un polyèdre à $V = v(a)$ faces pour chaque noeud a de valence $v(a)$, que l'on va définir par la donnée des V vecteurs normaux aux faces \vec{n}_{ab} . On a donc *a priori* un total de $L + \sum_a 2v(a) = 5L$ variables indépendantes. Mais pour que l'ensemble de ces vecteurs normaux décrivent de vrais polyèdres, il faut que la condition suivante, dite *condition de fermeture* soit vérifiée :

$$\vec{C}_a = \sum_{b \in v(a)} \mathcal{A}_{ab} \vec{n}_{ab} = \vec{0}. \quad (5.1)$$

En effet, cette condition permet de former un *polygone* à V côtés dans \mathbb{R}^3 , dont les arêtes sont formées par les vecteurs $\mathcal{A}_{ab} \vec{n}_{ab}$ mis bout à bout. Or il existe un théorème, dit *de Minkowski* [1], qui permet de s'assurer qu'à tout polygone de ce type correspond un *unique* polyèdre convexe, dont les V faces sont décrites par leurs vecteurs normaux \vec{n}_{ab} , et dont les aires sont \mathcal{A}_{ab} : c'est bien la géométrie que l'on cherche à décrire. Cette contrainte nous permet donc de décrire un unique polyèdre, et fixe $3N$ variables. On remarque ensuite que ces polyèdres sont néanmoins définis à une rotation près dans $\text{SO}(3)$ dont on n'a que faire : on élimine alors $\dim[\text{SO}(3)] = 3$ variables par noeud, portant le total à $5L - 6N$. Notons l'espace formé par l'ensemble de ces variables soumises à la condition de fermeture \mathcal{K}_Γ . En résumé :

$$\mathcal{K}_\Gamma \equiv \left[\mathbb{R} \times S^2 \times S^2 \right]^L \parallel \vec{C}^N, \quad (5.2)$$

où $\parallel \vec{C}$ signifie qu'on impose la contrainte $\vec{C}_a = \vec{0}$ et qu'on divise par l'action de $\text{SO}(3)$ pour chaque noeud²¹. L'apparition de la 2-sphère S^2 vient du fait qu'on peut dire de tout vecteur normal de \mathbb{R}^3 qu'il appartient à la 2-sphère de rayon unité.

Notons au passage que rien ne garanti que les faces partagées par deux polyèdres soient identiques : elles ont certes la même aire, mais leurs normales sont *a priori* différentes, ainsi que leurs formes. Pour pallier à ce problème, on peut alors imposer des contraintes supplémentaires, dites *contraintes de collage* ou *contraintes de Regge*, en référence au *calcul de Regge*²². Par la suite nous ne considérerons par de telles contraintes, car leur expression n'est connue que dans des cas bien particuliers (pavage en tétraèdres uniquement), et nous resterons donc avec des géométries un peu étranges, qu'on appelle dans la littérature *twisted geometries* (*géométries tordues*), du fait que les faces ne "collent" pas nécessairement bien les unes aux autres.

Malgré cela, peut-on relier l'espace \mathcal{K}_Γ à l'espace des phases S_Γ recherché ? Pour le moment non, et pour une raison simple : il nous manque des variables. En effet, l'espace des phases de la LQG sur un graphe est en principe constitué d'un élément de $\text{SU}(2)$ et de son moment conjugué par lien, ce qu'on note²³ $T^*\text{SU}(2)^L$, et l'invariance de jauge est obtenue par la double division (*réduction symplectique*) par le groupe de jauge en chaque

21. On ne peut utiliser la réduction symplectique // ici car $\mathbb{R} \times S^2 \times S^2$ n'est pas une variété symplectique (l'espace est potentiellement de dimension impaire).

22. Rapidement : le calcul de Regge est une formulation classique de la relativité générale sur un réseau, où l'on a découpé l'espace-temps en 4-simplexes (généralisation du tétraèdre en 4 dimensions). À l'intérieur de chaque 4-simplexe, la métrique est plate : toute l'information sur la courbure est contenue dans la manière dont les 4-simplexes sont assemblés les uns avec les autres, information qui se retrouve concentrée autour des *arêtes*, et représentée par un déficit d'angle (de la même manière qu'on mesure la courbure sur une sphère en calculant le déficit d'angle dans un triangle). Ainsi, la courbure de l'espace-temps peut être complètement définie par la seule donnée des *longueurs* de chacune de ces arêtes. Cette formulation rend par exemple possibles des calculs numériques sur des espaces-temps singuliers (collision de trous noirs, ...).

23. T^*G est la notation usuelle pour symboliser le fibré cotangent (*cotangent bundle*) d'un groupe G , c'est à dire l'ensemble des espaces tangents associés à chaque élément du groupe.

noeud (la division est double car on impose d'abord l'invariance de jauge, puis on choisit cette dernière). On note donc :

$$S_\Gamma = T^*SU(2)^L // SU(2)^N . \quad (5.3)$$

La dimension de cet espace est $2L \times 3 - 2N \times 3 = 6L - 6N$: il manque donc à \mathcal{K}_Γ une variable par lien pour être de même dimension de S_Γ . Qui plus est, ces deux espaces semblent avoir une topologie différente, et \mathcal{K}_Γ ne porte *a priori* aucune information sur la connexion.

On peut cependant définir une notion de transport parallèle dans \mathcal{K}_Γ . En effet, du fait que l'on considère des géométries un peu spéciales, rien ne garanti que \vec{n}_{ab} soit égal à \vec{n}_{ba} : la normale à une face est potentiellement différente que l'on se place du point de vue d'un polyèdre ou de son voisin. On peut alors définir une connexion $\mathbf{g}_{ab} \in SU(2)$, qui fait passer du polyèdre a au polyèdre b , comme la rotation qui envoie une normale sur l'autre. Explicitement :

$$\tau_i n_{ab}^i = \mathbf{g}_{ab} (\tau_i n_{ba}^i) \mathbf{g}_{ab}^{-1} , \quad (5.4)$$

où $\tau_i x^i$ est la représentation d'un vecteur \vec{x} de \mathbb{R}^3 dans $SU(2)$ (les τ_i sont toujours les générateurs du groupe). Clairement, cette connexion n'est pas définie de manière unique par la seule donnée de \vec{n}_{ab} et \vec{n}_{ba} : elle est définie à une rotation autour de \vec{n}_{ba} près. Ainsi, pour la définir totalement, il faut fournir un angle supplémentaire à chaque lien : voilà donc les variables qui nous manquaient ! On montre qui plus est que ces angles sont directement reliés à la courbure extrinsèque de la géométrie. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas *a priori* les coller proprement : les données à notre disposition contiennent de l'information à la fois sur la courbure intrinsèque et sur la courbure extrinsèque, ce qui rend impossible toute interprétation en terme de géométrie usuelle.

La solution la plus générale de Eq. 5.4 est de la forme :

$$\mathbf{g}_{ab} = \mathbf{N}_{ab} e^{\xi_{ab} \tau_3} \mathbf{N}_{ba}^{-1} , \quad \text{avec :} \quad \mathbf{N}_{ab} \tau_3 \mathbf{N}_{ab}^{-1} \equiv \tau_i n_{ab}^i , \quad (5.5)$$

et où $\xi_{ab} \in [-2\pi, 2\pi[\equiv S^1$ est l'angle qui manquait à notre description initiale. Par l'ajout de cet angle pour chaque lien, on obtient un nouvel espace P_Γ qu'on écrit formellement :

$$P_\Gamma \equiv \left[S^1 \times \mathbb{R} \times S^2 \times S^2 \right]^L // \vec{C}^N = \left[T^*S^1 \times S^2 \times S^2 \right]^L // \vec{C}^N , \quad (5.6)$$

où l'on a utilisé le fait que $T^*S^1 = \mathbb{R} \times S^1$ (l'espace tangent à un cercle est une droite, donc \mathbb{R}).

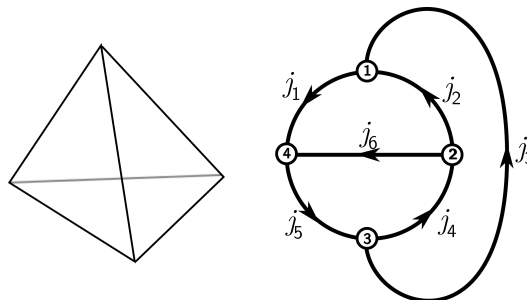
Un des résultats importants présentés dans [18] est que, dans une certaine mesure, P_Γ est équivalent à l'espace des phases S_Γ qu'on cherchait. Ainsi, un point de l'espace des phases classique peut être repéré par la donnée d'un ensemble $(\mathcal{A}_{ab}, \xi_{ab}, \vec{n}_{ab}, \vec{n}_{ba})$ pour chaque lien du graphe. Ce sont ces informations que devront contenir les états cohérents.

6 Mise en pratique : la gravité à 3 dimensions

Dans les sections précédentes, nous avons introduit beaucoup de théorie. Pour mieux comprendre les différents concepts abordés, nous avons souhaité prendre un exemple simple sur lequel il est possible de faire les calculs explicitement (et si possible sans trop de peine). Dans cette optique, nous avons choisi de nous intéresser à une théorie de la gravitation en seulement 3 dimensions, réputée bien plus simple que le cas réel à 4 dimensions, et avec une métrique *Euclidienne* (de signature totalement positive $(+, +, +)$). Nous aurions voulu travailler avec une métrique Lorentzienne, mais la tâche s'est révélée plus ardue. En effet, si l'on peut appliquer la quantification canonique à la LQG dans les deux cas, le groupe de jauge reste $SU(2)$ pour une métrique euclidienne, mais devient $SO(2,1)$ dans le cas Lorentzien, qui est un groupe non compact. On peut néanmoins faire les calculs (cf. [12]), mais avec quelques complications supplémentaires qui nous auraient trop retardés.

Dans cette théorie, nous nous sommes limités à l'étude d'un graphe simple : le graphe dual à la surface d'un tétraèdre, cf. Fig. 10. Ce graphe fermé est le plus simple que l'on puisse imaginer et qui ait une interprétation classique. Cependant, la majorité de nos calculs est applicable au cas plus général de tout graphe trivalent.

FIGURE 10 – Un tétraèdre quelconque (à gauche), et le graphe dual à sa surface (à droite). L'orientation choisie est purement arbitraire, mais nécessaire pour faire les calculs. On peut montrer qu'un choix d'orientation différent ne résulte qu'en un changement de signe global dans les calculs.



Dans ce contexte, nous avons implémenté explicitement l'invariance de jauge et calculé les intertwiners pour obtenir les états de spin network. Nous avons ensuite défini des états cohérents que nous avons rendu invariants de jauge, et dont nous avons explicité quelques propriétés dans la limite semi-classique. Enfin, nous avons essayé d'appliquer la contrainte Hamiltonienne sur ces états, et montré qu'elle conduit (comme on s'y attend sans présence de matière) à une géométrie plate.

Avant tout, nous allons présenter rapidement les différences entre la LQG que l'on vient d'introduire et sa version en 3 dimensions.

6.1 Quelques mots sur la LQG en 3 dimensions

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'espace était à quatre dimensions dont une de temps. Le groupe de jauge était $SO(3,1)$ à la base, mais celui-ci a été réduit à $SU(2)$ grâce au changement de variable d'Ashtekar.

Si l'on cherche à appliquer la même méthode sur un espace à seulement trois dimensions Euclidiennes, le groupe de jauge est dès le départ $SO(3)$ (ou $SU(2)$ de manière complètement équivalente). Il est intéressant de constater qu'il n'est pas nécessaire de faire un changement de variable dans ce cas, et on peut donc travailler directement avec ce groupe de jauge. La procédure est décrite en détail dans [12] pour le cas Lorentzien, mais peut facilement être traduite pour le cas Euclidien. On peut alors reprendre tous les résultats que l'on a obtenus précédemment et les appliquer au cas tri-dimensionnel.

En particulier, on retrouve les réseaux de spin, la procédure d'invariance de jauge, etc. En revanche, les opérateurs géométriques sont différents. On montre par exemple dans [12] que l'opérateur de *longueur* remplace l'opérateur d'aire, et que son spectre est également :

$$L_j = \ell_P \sqrt{j(j+1)}. \quad (6.1)$$

6.2 Construction des états de spin network

Un état quelconque de l'espace de Hilbert initial \mathcal{H} est, comme on l'a vu, une fonction cylindrique que l'on peut décomposer grâce au théorème de Peter-Weyl sur les matrices de Wigner comme :

$$\begin{aligned} \langle A | \psi_{(\Gamma, f)} \rangle &\equiv f(\mathbf{h}_{e_1}[A], \dots, \mathbf{h}_{e_6}[A]) \\ &= \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} f_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \\ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \\ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6}} \mathcal{D}_{m_1, n_1}^{j_1}(\mathbf{h}_{e_1}[A]) \mathcal{D}_{m_2, n_2}^{j_2}(\mathbf{h}_{e_2}[A]) \mathcal{D}_{m_3, n_3}^{j_3}(\mathbf{h}_{e_3}[A]) \\ &\quad \mathcal{D}_{m_4, n_4}^{j_4}(\mathbf{h}_{e_4}[A]) \mathcal{D}_{m_5, n_5}^{j_5}(\mathbf{h}_{e_5}[A]) \mathcal{D}_{m_6, n_6}^{j_6}(\mathbf{h}_{e_6}[A]). \end{aligned}$$

Imposer l'invariance de jauge revient alors à introduire des éléments de $SU(2)$ au départ et à l'arrivée de chaque holonomie, puis d'intégrer sur ces éléments. La fonction invariante de jauge est alors :

$$\begin{aligned} \langle A | \psi_{(\Gamma, f)}^0 \rangle &= \int d\mu(\mathbf{g}_1) d\mu(\mathbf{g}_2) d\mu(\mathbf{g}_3) d\mu(\mathbf{g}_4) \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} f_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \\ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \\ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6}} \\ &\quad \mathcal{D}_{m_1, n_1}^{j_1}(\mathbf{g}_1 \mathbf{h}_{e_1} \mathbf{g}_1^{-1}) \mathcal{D}_{m_2, n_2}^{j_2}(\mathbf{g}_1 \mathbf{h}_{e_2} \mathbf{g}_2^{-1}) \mathcal{D}_{m_3, n_3}^{j_3}(\mathbf{g}_1 \mathbf{h}_{e_3} \mathbf{g}_3^{-1}) \\ &\quad \mathcal{D}_{m_4, n_4}^{j_4}(\mathbf{g}_2 \mathbf{h}_{e_4} \mathbf{g}_3^{-1}) \mathcal{D}_{m_5, n_5}^{j_5}(\mathbf{g}_3 \mathbf{h}_{e_5} \mathbf{g}_4^{-1}) \mathcal{D}_{m_6, n_6}^{j_6}(\mathbf{g}_4 \mathbf{h}_{e_6} \mathbf{g}_2^{-1}). \end{aligned}$$

On utilise ensuite la loi de groupe et la propriété de conjugaison des matrices de Wigner pour développer :

$$\begin{aligned} \langle A | \psi_{(\Gamma, f)}^0 \rangle &= \int d\mu(\mathbf{g}_1) d\mu(\mathbf{g}_2) d\mu(\mathbf{g}_3) d\mu(\mathbf{g}_4) \sum_{\{j_i, m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i\}} f_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \\ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \\ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6}} \\ &\quad \mathcal{D}_{\alpha_1, \beta_1}^{j_1}(\mathbf{h}_{e_1}) \mathcal{D}_{\alpha_2, \beta_2}^{j_2}(\mathbf{h}_{e_2}) \mathcal{D}_{\alpha_3, \beta_3}^{j_3}(\mathbf{h}_{e_3}) \mathcal{D}_{\alpha_4, \beta_4}^{j_4}(\mathbf{h}_{e_4}) \mathcal{D}_{\alpha_5, \beta_5}^{j_5}(\mathbf{h}_{e_5}) \mathcal{D}_{\alpha_6, \beta_6}^{j_6}(\mathbf{h}_{e_6}) \\ &\quad (-1)^{n_1 - \beta_1} \mathcal{D}_{m_2, \alpha_2}^{j_2}(\mathbf{g}_1) \mathcal{D}_{m_3, \alpha_3}^{j_3}(\mathbf{g}_1) \mathcal{D}_{-n_1, -\beta_1}^{j_1}(\mathbf{g}_1) \\ &\quad (-1)^{n_2 - \beta_2 + n_6 - \beta_6} \mathcal{D}_{m_4, \alpha_4}^{j_4}(\mathbf{g}_2) \mathcal{D}_{-n_2, -\beta_2}^{j_2}(\mathbf{g}_2) \mathcal{D}_{-n_6, -\beta_6}^{j_6}(\mathbf{g}_2) \\ &\quad (-1)^{n_3 - \beta_3 + n_4 - \beta_4} \mathcal{D}_{m_5, \alpha_5}^{j_5}(\mathbf{g}_3) \mathcal{D}_{-n_3, -\beta_3}^{j_3}(\mathbf{g}_3) \mathcal{D}_{-n_4, -\beta_4}^{j_4}(\mathbf{g}_3) \\ &\quad (-1)^{n_5 - \beta_5} \mathcal{D}_{m_1, \alpha_1}^{j_1}(\mathbf{g}_4) \mathcal{D}_{m_6, \alpha_6}^{j_6}(\mathbf{g}_4) \mathcal{D}_{-n_5, -\beta_5}^{j_5}(\mathbf{g}_4), \end{aligned}$$

puis on identifie les intertwiners, qui sont ici des symboles $3j$ (la notation n'est pas standard mais a le mérite d'économiser un peu de place) :

$$\begin{aligned} \langle A | \psi_{(\Gamma, f)}^0 \rangle &= \sum_{\{j_i, m_i, n_i, \alpha_i, \beta_i\}} (-1)^{\sum_i n_i - \beta_i} f_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \\ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \\ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6}} \\ &\quad \mathcal{D}_{\alpha_1, \beta_1}^{j_1}(\mathbf{h}_{e_1}) \mathcal{D}_{\alpha_2, \beta_2}^{j_2}(\mathbf{h}_{e_2}) \mathcal{D}_{\alpha_3, \beta_3}^{j_3}(\mathbf{h}_{e_3}) \mathcal{D}_{\alpha_4, \beta_4}^{j_4}(\mathbf{h}_{e_4}) \mathcal{D}_{\alpha_5, \beta_5}^{j_5}(\mathbf{h}_{e_5}) \mathcal{D}_{\alpha_6, \beta_6}^{j_6}(\mathbf{h}_{e_6}) \\ &\quad (3j)_{m_2, m_3, -n_1}^{j_2, j_3, j_1} (3j)_{\alpha_2, \alpha_3, -\beta_1}^{j_2, j_3, j_1} (3j)_{m_4, -n_2, -n_6}^{j_4, j_2, j_6} (3j)_{\alpha_4, -\beta_2, -\beta_6}^{j_4, j_2, j_6} \\ &\quad (3j)_{m_5, -n_3, -n_4}^{j_5, j_3, j_4} (3j)_{\alpha_5, -\beta_3, -\beta_4}^{j_5, j_3, j_4} (3j)_{m_1, m_6, -n_5}^{j_1, j_6, j_5} (3j)_{\alpha_1, \alpha_6, -\beta_5}^{j_1, j_6, j_5}. \end{aligned}$$

Au final, on peut ré-écrire cette fonction comme :

$$\langle A|\psi_{(\Gamma,f)}^0\rangle = \sum_{\{j_i\}} \hat{f}^{\{j_i\}} \langle A|\Gamma, \{j_i\}\rangle, \quad (6.2)$$

avec les coefficients invariants de jauge (où l'on a changé $n_i \rightarrow -n_i$) :

$$\begin{aligned} \hat{f}^{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6} &= \sum_{\{m_i, n_i\}} (-1)^{\sum j_i - n_i} f_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 \\ -n_1, -n_2, -n_3, -n_4, -n_5, -n_6}}^{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6} \\ &= (3j)_{m_2, m_3, n_1}^{j_2, j_3, j_1} (3j)_{m_4, n_2, n_6}^{j_4, j_2, j_6} (3j)_{m_5, n_3, n_4}^{j_5, j_3, j_4} (3j)_{m_1, m_6, n_5}^{j_1, j_6, j_5}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

ainsi que les états de spin network (avec de même $\beta_i \rightarrow -\beta_i$) :

$$\begin{aligned} |\Gamma, \{j_i\}\rangle &= \sum_{\{\alpha_i, \beta_i\}} (-1)^{\sum \beta_i - j_i} (3j)_{\alpha_2, \alpha_3, \beta_1}^{j_2, j_3, j_1} (3j)_{\alpha_4, \beta_2, \beta_6}^{j_4, j_2, j_6} (3j)_{\alpha_5, \beta_3, \beta_4}^{j_5, j_3, j_4} (3j)_{\alpha_1, \alpha_6, \beta_5}^{j_1, j_6, j_5} \bigotimes_i |\Gamma, j_i, \alpha_i, -\beta_i\rangle_{e_i}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Les facteurs $(-1)^{\sum j_i}$ présents dans chacune de ces expressions se compensent, et ont été rajoutés pour des raisons de normalisation. En effet, en partant du fait que les états de lien forment une base complète et orthonormée de l'espace de Hilbert associé à chaque lien, on montre assez facilement que les états de spin network ainsi définis et normalisés forment eux-mêmes une base complète et orthonormée de l'espace de Hilbert du graphe Γ invariant de jauge, \mathcal{H}_Γ^0 . Pour le montrer, on utilise le fait que $\sum_i \beta_i - j_i$ est toujours un entier, ainsi que la propriété de normalisation des symboles $3j$ suivante :

$$\sum_{\{m_i\}} \left[(3j)_{m_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} \right]^2 = 1. \quad (6.5)$$

6.3 Construction des états cohérents

6.3.1 Introduction et invariance de jauge

Le fait de se limiter à un graphe trivalent rend les choses plus simples au niveau des états cohérents. En effet, on a vu que l'espace des phases de la LQG était de dimension $6L - 6N$. Avec $N = \frac{2}{3}L$ dans le cas trivalent, cette dimension devient simplement $2L$. On s'attend donc à ce que l'information contenue dans les vecteurs normaux \vec{n}_{ab} des twisted geometries soit redondante, et qu'il ne reste plus que les longueurs ℓ_i et les angles ξ_i pour chaque lien. Nous verrons que c'est bien le cas par la suite.

Il existe plusieurs types d'états cohérents possibles. Certains pourront par exemple être plus piqués pour une observable en particulier, ou être plus simples à manipuler. La forme des états cohérents que l'on a choisie ici et qui a été étudiée dans [17] est :

$$|\Gamma, \{t_i, \mathbf{H}_i\}\rangle_0 \equiv \sum_{\{j_i, m_i, n_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i (j_i + 1)} \mathcal{D}_{m_i, n_i}^{j_i}(\mathbf{H}_i) \bigotimes_i |\Gamma, j_i, m_i, n_i\rangle_{e_i}, \quad (6.6)$$

où t_i est un paramètre dont on va se servir pour ajuster correctement l'évolution des incertitudes, et où les \mathbf{H}_i sont des éléments de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, version complexifiée de la connexion \mathbf{g}_i qu'on a introduite dans la section sur les twisted geometries :

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{N}_i e^{\omega_i \tau_3} \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{N}}_i^{-1}, \quad \text{avec : } \omega_i = \xi_i + i \eta_i, \quad \text{et : } \tilde{\mathbf{e}} = R_y(\pi) \in \text{SU}(2). \quad (6.7)$$

Le paramètre η_i servira à piloter la valeur moyenne de j_i , et comme on l'a vu, ξ_i servira quant à lui à extraire de l'information sur la courbure extrinsèque. On introduit la matrice $\tilde{\mathbf{e}}$ pour ré-orienter les normales de sorte qu'elles pointent toujours vers l'extérieur de chaque face (c'est donc une rotation de π autour de l'axe y par exemple).

On va d'abord s'intéresser à la matrice $\mathcal{D}_{m_i, n_i}^{j_i}(\mathbf{H}_i)$. En utilisant la loi de groupe ainsi que l'expression de \mathbf{H}_i ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m_i, n_i}^{j_i}(\mathbf{H}_i) &= \mathcal{D}_{m_i, p_i}^{j_i}(\mathbf{N}_i) e^{-i\omega_i p_i} d_{p_i, q_i}^{j_i}(\pi) \mathcal{D}_{q_i, n_i}^{j_i}(\tilde{\mathbf{N}}_i^{-1}) \\ &= \mathcal{D}_{m_i, p_i}^{j_i}(\mathbf{N}_i) e^{-i\omega_i p_i} \mathcal{D}_{-p_i, n_i}^{j_i}(\tilde{\mathbf{N}}_i^{-1}) (-1)^{3j_i + p_i} \\ &= e^{-i\omega_i p_i} \mathcal{D}_{m_i, p_i}^{j_i}(\mathbf{N}_i) \mathcal{D}_{-n_i, p_i}^{j_i}(\tilde{\mathbf{N}}_i) (-1)^{j_i + n_i}, \end{aligned}$$

car $(-1)^{3j_i + 2p_i + n_i} = (-1)^{j_i + n_i}$. Les matrices $d_{m, n}^j$ sont les petites matrices de Wigner (des rotations pures autour de y).

On souhaite maintenant rendre ces états cohérents invariants de jauge. On reprend alors la même procédure que celle décrite plus haut pour une fonction cylindrique générale (car on remarquera que les états cohérents ainsi définis sont des fonctions cylindriques). Comme on l'a vu, cela revient à remplacer les états $\otimes_i |\Gamma, j_i, m_i, n_i\rangle_{e_i}$ par les états de spin network $|\Gamma, \{j_i\}\rangle$ et à introduire les quatre intertwiners :

$$\begin{aligned} &|\Gamma, \{t_i, \mathbf{H}_i\}\rangle \\ &= \sum_{\{j_i, m_i, n_i, p_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i (j_i + 1) - i\omega_i p_i} \mathcal{D}_{m_i, p_i}^{j_i}(\mathbf{N}_i) \mathcal{D}_{n_i, p_i}^{j_i}(\tilde{\mathbf{N}}_i) (-1)^{2j_i} \\ &\quad (3j)_{m_2, m_3, n_1}^{j_2, j_3, j_1} (3j)_{m_4, n_2, n_6}^{j_4, j_2, j_6} (3j)_{m_5, n_3, n_4}^{j_5, j_3, j_4} (3j)_{m_1, m_6, n_5}^{j_1, j_6, j_5} |\Gamma, \{j_i\}\rangle \\ &\equiv \sum_{\{j_i, p_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i (j_i + 1) - i\omega_i p_i} (-1)^{2j_i} \left[\prod_a V_a(\{j_i, \mathbf{N}_i, \tilde{\mathbf{N}}_i, p_i\}) \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle, \end{aligned} \quad (6.8)$$

où les V_a sont les *intertwiners cohérents*. En notant chaque noeud du graphe a, b , etc., alors si un lien i est décrit par un couple ab , on écrit $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_{ab}$ et $\tilde{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_{ba}$, $p_i = p_{ab} = p_{ba}$ et $m_i = m_{ab}$, $n_i = m_{ba}$. Avec cette notation, les intertwiners s'écrivent :

$$\begin{aligned} &V_a(\{j_{ab_i}, \mathbf{N}_{ab_i}, p_{ab_i}\}) = \\ &\quad \sum_{\{m_{ab_i}\}, b_i \in v(a)} (3j)_{m_{ab_1}, m_{ab_2}, m_{ab_3}}^{j_{ab_1}, j_{ab_2}, j_{ab_3}} \mathcal{D}_{m_{ab_1}, p_{ab_1}}^{j_{ab_1}}(\mathbf{N}_{ab_1}) \mathcal{D}_{m_{ab_2}, p_{ab_2}}^{j_{ab_2}}(\mathbf{N}_{ab_2}) \mathcal{D}_{m_{ab_3}, p_{ab_3}}^{j_{ab_3}}(\mathbf{N}_{ab_3}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

où $b_i \in v(a)$ signifie b_i *voisin de a*. En utilisant l'invariance de jauge de ces intertwiners ainsi que la condition de fermeture, on peut les ré-écrire plus simplement comme (voir App. B) :

$$\begin{aligned} &V_a(\{j_{ab_i}, \mathbf{N}_{ab_i}, p_{ab_i}\}) = \\ &\quad \sum_{\{m_{ab_i}\}, b_i \in v(a)} (3j)_{m_{ab_1}, m_{ab_2}, m_{ab_3}}^{j_{ab_1}, j_{ab_2}, j_{ab_3}} \delta_{m_{ab_1}, p_{ab_1}} d_{m_{ab_2}, p_{ab_2}}^{j_{ab_2}}(\varphi_{ab_2}) d_{m_{ab_3}, p_{ab_3}}^{j_{ab_3}}(-\varphi_{ab_3}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

où les deux angles φ_{ab_2} et φ_{ab_3} sont donnés par :

$$\vec{n}_{ab_1} \cdot \vec{n}_{ab_2} = \cos(\varphi_{ab_2}), \quad (6.11)$$

$$\vec{n}_{ab_1} \cdot \vec{n}_{ab_3} = \cos(\varphi_{ab_3}). \quad (6.12)$$

Mais comme la géométrie duale à chaque vertex est un triangle, cette information est entièrement déterminée par la donnée des longueurs classique des arêtes ℓ_i . On ne les a pas

encore définies, mais elles font déjà partie des données de notre état cohérent : on verra en effet par la suite que $\ell_i = \frac{\eta_i}{2t_i} + \frac{1}{2}$. L'état ne dépend donc pas de la donnée des normales \mathbf{N}_i , et on peut l'écrire plus simplement :

$$|\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle \equiv \sum_{\{j_i, p_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i(j_i+1) - i\omega_i p_i} (-1)^{2j_i} \left[\prod_a V_a(\{j_i, \ell_i, p_i\}) \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle . \quad (6.13)$$

6.3.2 Quelques approximations

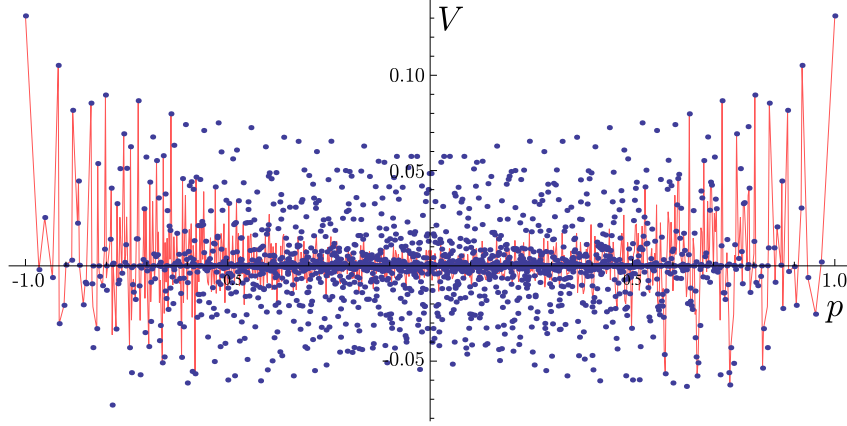


FIGURE 11 – Évaluation numérique de l'intertwiner pour $j_1 = 10$, $j_2 = 7$ et $j_3 = 4$. En abscisses, p est défini par $(p_1/j_1 + p_2/j_2 + p_3/j_3)/3$, et la valeur en ordonnées est celle de l'intertwiner pour toutes les valeurs des p_i qui mènent au même p moyen, que l'on a tracées en bleu. La courbe rouge est la moyenne de ces données. On voit bien que les maxima correspondent à $p = \pm 1$, soit $p_{ab_i} = \pm j_{ab_i}$. Cette tendance s'accroît d'autant que les valeurs des j_s sont grandes, et demeure même pour de petites valeurs. Note : on a choisi $\ell_i = j_i$ pour faire le calcul.

Cette dernière expression peut être étudiée numériquement. En particulier, on voit clairement que les intertwiners sont maximaux pour $p_{ab_i} = \pm j_{ab_i}$, voir Fig. 11. Cette tendance nous suggère d'étudier le cas particulier où $p_i = j_i$ (on considère donc des intertwiners cohérent de Livine et Speziale [15]). On voit d'ailleurs dès le départ que la somme sur les indices p_i est dominée par ces termes en question si $\eta_i \gg 1$ [17] :

$$\mathcal{D}_{p_i, q_i}^{j_i} (e^{-i\omega_i \tau_3}) = \delta_{p_i, q_i} e^{(\eta_i - i\xi_i) p_i} \simeq \delta_{p_i, q_i} \delta_{p_i, j_i} e^{(\eta_i - i\xi_i) j_i} . \quad (6.14)$$

On considère donc à partir de maintenant le cas particulier où les η_i sont grands, et on a des états cohérents plus simples :

$$|\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle = \sum_{\{j_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i(j_i+1) - i\omega_i j_i} (-1)^{2j_i} \left[\prod_a V_a(\{j_i, \ell_i\}) \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle . \quad (6.15)$$

Dans ce cas précis, on peut simplifier grandement l'expression des intertwiners. Le calcul, présenté dans App. C, donne :

$$V(j_1, j_2, j_3) = \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3)!(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \\ (-1)^{2j_2 + 2j_3} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 + j_1 - j_3} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-j_2 + j_1 + j_3} \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right)^{j_2 - j_1 + j_3} .$$

On montre également dans App. C que, dans la limite des grandes valeurs de j (limite qui sera justifiée par la suite), la valeur de V tend vers une constante que l'on peut absorber dans la normalisation de l'état. En première approximation, on peut donc complètement *oublier* les intertwiners. Nos états prennent alors la forme plus sympathique :

$$|\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle = \sum_{\{j_i\}} \prod_i e^{-t_i j_i^2 - i \xi_i j_i + (\eta_i - t_i) j_i} |\Gamma, \{j_i\}\rangle ,$$

où l'on a rangé le facteur $(-1)^{2j_i}$ dans la définition de ξ_i . En changeant une fois de plus la normalisation de l'état, on peut reformuler cette expression comme :

$$|\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle = \sum_{\{j_i\}} \prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle , \quad (6.16)$$

ce qui définit donc les longueurs classiques ℓ_i :

$$\ell_i \equiv \frac{\eta_i}{2t_i} - \frac{1}{2} . \quad (6.17)$$

6.3.3 Étude des valeurs moyennes et dispersions

Pour justifier cette définition, il nous faut calculer la valeur moyenne des spins j_i . Du fait que les spins sont maintenant découplés (de part l'absence des intertwiners), le calcul est relativement simple et revient à :

$$\langle j_i \rangle \equiv \frac{\sum_{j_i=1/2}^{\infty} j_i \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right]}{\sum_{j_i=1/2}^{\infty} \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right]} \equiv \frac{f_3(\eta_i, t_i)}{f_2(\eta_i, t_i)} ,$$

où l'on approxime les sommes par les intégrales suivantes :

$$f_3(\eta_i, t_i) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} j_i \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right] dj_i ,$$

$$f_2(\eta_i, t_i) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right] dj_i .$$

Le calcul donne immédiatement (l'estimation de l'erreur a été obtenue avec l'aide de *Mathematica*) :

$$\langle j_i \rangle = \ell_i + \mathcal{O} \left(e^{-2t_i(\ell_i - 1/2)^2} \right) .$$

Ce résultat est conforté par une analyse numérique, voir Fig. 12, qui permet de juger de la qualité de toutes les approximations que l'on a faites depuis le départ, et de donner un sens à la limite des grands j_i . En effet, on voit que la valeur moyenne de j_i est, dans une certaine limite, égale au ℓ_i que l'on a choisi pour notre état cohérent. Vu que les spins j_i représentent des longueurs, on peut donc bien interpréter ℓ_i comme étant la longueur de l'espace des phases classique. Considérer j_i grand implique donc de prendre ℓ_i grand également : c'est ce qu'on appelle la *limite semi-classique* des grandes longueurs. Pour que la valeur moyenne tende bien vers ℓ_i , il faut néanmoins supposer que $t_i \sim \ell_i^k$ avec $k > -2$. À noter : on voit bien sur Fig. 12 que cette approximation est valable pour des valeurs de j_i de l'ordre de 10, soit pour des longueurs de l'ordre de $10 \cdot \ell_P$ ce qui reste relativement petit.

Pour continuer la construction de notre état cohérent, il faut voir sous quelles conditions l'écart relatif autour de $j_i = \ell_i$ tend vers zéro dans la limite semi-classique. On calcule donc de la même manière :

$$\langle j_i^2 \rangle = \ell_i^2 + \frac{1}{4t_i} + \mathcal{O}\left(\ell_i e^{-2t_i(\ell_i-1/2)^2}\right), \quad (6.18)$$

ce qui nous permet de d'obtenir la dispersion :

$$\Delta j_i \equiv \sqrt{\langle j_i^2 \rangle - \langle j_i \rangle^2} \simeq \frac{1}{4t_i}, \quad (6.19)$$

pour finalement exprimer l'écart relatif :

$$\frac{\Delta j_i}{\langle j_i \rangle} \simeq \frac{1}{4t_i \ell_i}. \quad (6.20)$$

Pour que la limite semi-classique ait un sens, il faut que cet écart tende vers zéro quand $\ell_i \rightarrow \infty$. Cela implique, on posant toujours $t_i \sim \ell_i^k$, que l'on doit avoir $k > -1$. Mais n'oublions pas que l'on aussi a dû considérer η_i grand pour construire ces états. En vertu de Eq. 6.17, on voit que cela implique également $k > -1$.

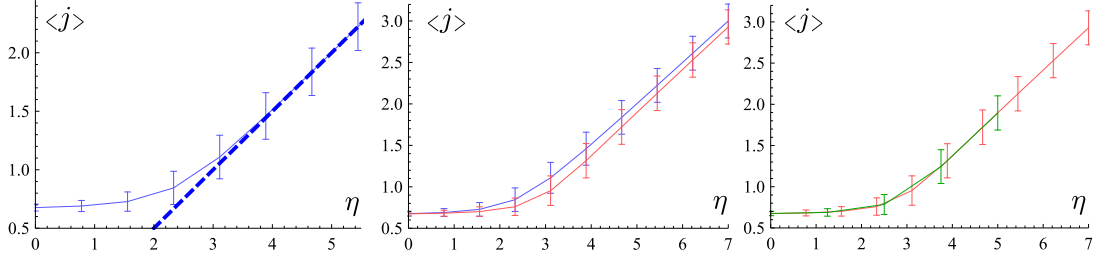


FIGURE 12 – Étude numérique de la valeur moyenne des spins pour différents états cohérents. Plus précisément $\langle j \rangle \equiv \frac{1}{6} \sum_i \langle j_i \rangle$. Tous les η_i ont été pris égaux à une même valeur η , et $t_i = 1$. Sur le graphe de gauche, on a représenté le résultat obtenu avec l'état cohérent final Eq. 6.16 en traits pleins, et en pointillés l'approximation $\langle j \rangle = \ell = \frac{\eta}{2t} + \frac{1}{2}$. On voit nettement que, pour des valeurs de η suffisamment éloignées de zéro, la valeur moyenne des spins tend rapidement vers ℓ . Sur le graphe au centre, la courbe bleue est la même que sur le graphe de gauche, et la courbe rouge est l'état cohérent Eq. 6.15, où l'on a conservé les intertwiners. Ce graphe nous permet de constater une différence relativement importante pour $\eta \simeq 3$, mais celle-ci s'efface quand η augmente. Enfin, sur le graphe de droite, la courbe rouge est la même que sur le graphe au centre, et la courbe verte l'état cohérent initial Eq. 6.13, où l'on a gardé la somme sur les p_i : les calculs étant beaucoup plus lourds, il n'a pas été possible d'aller au delà de ce qui est présenté ici dans des temps raisonnables. On constate néanmoins qu'il s'agit d'une excellente approximation. Sur les trois graphes, la dispersion ($\Delta j^2 \equiv \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2$, représentée ici par les barres d'erreurs) est relativement faible et pratiquement constante. Note : pour faire les calculs, il faut nécessairement tronquer la somme sur les j_i en prenant $j_i \leq j_{max}$. La courbe jaune a été obtenue avec $j_{max} = 2.5$, et les autres avec $j_{max} = 7$. Si l'on prend une valeur de j_{max} trop faible, l'influence sur le résultat est immédiate : les valeurs moyennes stagnent.

La dernière étape est de considérer la seconde observable à notre disposition, qui est la courbure extrinsèque, associée à l'angle ξ_i . Pour cela, introduisons d'abord l'opérateur de création sur les spins \hat{a}_k^\dagger que l'on définit par :

$$\hat{a}_k^\dagger |\Gamma, j_1, \dots, j_k, \dots\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \dots, j_k + 1, \dots\rangle. \quad (6.21)$$

Son commutateur avec \hat{j}_k est par définition :

$$\left[\hat{j}_k, \hat{a}_k \right] = \hat{a}_k . \quad (6.22)$$

On peut aussi l'écrire sous la forme [10] :

$$\hat{a}_k = e^{i \hat{b}_k} , \quad \text{avec :} \quad \left[\hat{b}_k, \hat{j}_k \right] = i \mathbb{1} . \quad (6.23)$$

Ainsi, \hat{j}_i et \hat{b}_i sont deux opérateurs conjugués au sens de la mécanique quantique. Il doit donc leur correspondre un couple de variables classiques, conjuguées au sens de la mécanique analytique. Or, on a vu que l'espace des phases dans notre cas est T^*S_1 , c'est à dire qu'il est décrit par le couple de variables (ℓ_i, ξ_i) : on peut alors supposer par analogie que \hat{b}_i est l'opérateur associé à ξ_i . Pour finir de déterminer notre état cohérent, il faut donc étudier la valeur moyenne et l'écart relatif associés à cette observable, et vérifier que ces valeurs vérifient les propriétés attendues d'un état cohérent.

L'action de l'opérateur de création est :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^\dagger |\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle &= \sum_{\{j_i\}} \prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] |\Gamma, j_1, \dots, j_k + 1, \dots\rangle \\ &= \sum_{\{j_i\}} \left[\prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] \right] \exp \left[2 t_k j_k - \eta_k + i \xi_k \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle , \end{aligned}$$

et pour l'opérateur d'annihilation \hat{a}_k on a :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k |\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle &= \sum_{\{j_i\}} \prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] |\Gamma, j_1, \dots, j_k - 1, \dots\rangle \\ &= \sum_{\{j_i\}} \left[\prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] \right] \exp \left[-2 t_k - 2 t_k j_k + \eta_k - i \xi_k \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle . \end{aligned}$$

Ces deux opérateurs ne sont évidemment pas hermitiens, et ils ne sont donc pas des observables. On peut en revanche considérer la combinaison $\frac{1}{2} [\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k] \equiv \cos(\hat{b}_k)$:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{b}_k) |\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle &= \sum_{\{j_i\}} \left[\prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] \right] \\ &\quad e^{-t_k} \cos \left(\xi_k + i \eta_k - 2 i t_k j_k - i t_k \right) |\Gamma, \{j_i\}\rangle . \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\left\langle \cos(\hat{b}_k) \right\rangle \simeq e^{-t_i/2} \cos(\xi_i) , \quad (6.24)$$

ce qui justifie notre interprétation. Il nous reste donc à calculer la dispersion :

$$\begin{aligned} \cos(\hat{b}_k)^2 |\Gamma, \{t_i, \omega_i\}\rangle &= \sum_{\{j_i\}} \left[\prod_i \exp \left[-t_i (j_i - \ell_i)^2 - i \xi_i j_i \right] \right] \\ &\quad \frac{1}{2} \left[e^{-4 t_k} \cos \left(2 \xi_k + 2 i \eta_k - 4 i t_k j_k - 2 i t_k \right) + 1 \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle , \end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$\langle \cos(\hat{b}_k)^2 \rangle \simeq \frac{1}{2} \left[1 + e^{-2t_i} \cos(2\xi_i) \right]. \quad (6.25)$$

L'écart relatif vaut alors :

$$\frac{\Delta \cos(\hat{b}_k)}{\langle \cos(\hat{b}_k) \rangle} \simeq \frac{e^{-t_i/2}}{\sqrt{2} \cos(\xi_i)} \sqrt{(1 - e^{-t_i})(1 - e^{-t_i} \cos(2\xi_i))}. \quad (6.26)$$

Si l'on pose $t_i \sim \ell_i^k$ comme précédemment, on voit que pour $\ell_i \rightarrow \infty$, la dispersion ne tend vers 0 que si $k < 0$. En résumé, on doit avoir $t_i \sim \ell_i^k$ avec $k \in]-1, 0[$. Un choix simple est de prendre (en ordre de grandeur) :

$$t_i \sim \frac{1}{\sqrt{|\ell_i|}}. \quad (6.27)$$

6.3.4 Résolution de l'identité

Pour pouvoir les utiliser, il faut maintenant être capable de construire l'identité :

$$\mathbb{1} = \int \left[\prod_i \mu(\ell_i, \xi_i) d\ell_i d\xi_i \right] |\Gamma, \{\ell_i, \xi_i\}\rangle \langle \Gamma, \{\ell_i, \xi_i\}|, \quad (6.28)$$

où $\mu(\ell_i, \xi_i)$ est une mesure à déterminer. Explicitement :

$$\mathbb{1} = \sum_{\{j_i, j'_i\}} \int \prod_i \mu(\ell_i, \xi_i) d\ell_i d\xi_i \exp \left[-t_i ((j_i - \ell_i)^2 + (j'_i - \ell_i)^2) - i \xi_i (j_i - j'_i) \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle \langle \Gamma, \{j'_i\}|.$$

Or, on sait que les états de spin network $|\Gamma, \{j_i\}\rangle$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert. On a donc :

$$\mathbb{1} = \sum_{\{j_i\}} |\Gamma, \{j_i\}\rangle \langle \Gamma, \{j_i\}|. \quad (6.29)$$

Cette forme nous suggère que l'intégration doit sélectionner d'une manière ou d'une autre $j'_i = j_i$. On voit qu'il est simple de le faire grâce à l'intégration sur ξ_i ($\in [-2\pi, 2\pi[$ car on est dans $SU(2)$). En effet :

$$\int_{-2\pi}^{+2\pi} d\xi_i \exp \left[-i \xi_i (j_i - j'_i) \right] = \frac{2 \sin(\pi(j_i - j'_i))}{j_i - j'_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_i - j'_i \in [\mathbb{Z}^* \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})] \\ 2\pi & \text{si } j_i = j'_i \end{cases}$$

On voit donc qu'il suffit de choisir $\mu(\ell_i, \xi_i) = \frac{1}{2\pi} \mu(\ell_i)$. Il reste alors :

$$\mathbb{1} = \int \prod_i \left[\frac{1}{2\pi} \mu(\ell_i) d\ell_i \right] \sum_{\{j_i\}} \prod_i \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right] |\Gamma, \{j_i\}\rangle \langle \Gamma, \{j_i\}|$$

ce qui implique pour chaque terme de la somme :

$$1 = \prod_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \mu(\ell_i) d\ell_i \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right].$$

En considérant t_i constant, on peut calculer explicitement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ell_i}{2\pi} \exp \left[-2t_i (j_i - \ell_i)^2 \right] = \sqrt{\frac{1}{8\pi t_i}}.$$

Finalement, on voit que l'identité est obtenue en prenant :

$$\mu(\ell_i, \xi_i) = \sqrt{8\pi t_i}. \quad (6.30)$$

6.4 Application de la contrainte Hamiltonienne

7 Conclusion

Appendices

A Algèbre de SU(2) à partir de la contrainte de Gauss

On a

$$G_i \equiv \partial_a E_i^a + \epsilon_{ji}{}^k A_a^j E_k^a, \quad (\text{A.1})$$

$$G(\vec{\Lambda}) \equiv \int d^3x G_i(\vec{x}) \Lambda^i(\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

et on cherche à calculer le crochet de Poisson $\{G(\vec{\Lambda}_1), G(\vec{\Lambda}_2)\}$, défini par :

$$\{F_1, F_2\} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta F_1}{\delta A_a^i(\vec{x})} \frac{\delta F_2}{\delta E_i^a(\vec{x})} - \frac{\delta F_1}{\delta E_i^a(\vec{x})} \frac{\delta F_2}{\delta A_a^i(\vec{x})} \right]. \quad (\text{A.3})$$

À partir des crochets sur les variables canoniques :

$$\begin{aligned} \{G(\vec{\Lambda}_1), A_a^i(\vec{x})\} &= \int d^3y \Lambda_1^j(\vec{y}) \left[\partial_{y^b} \{E_j^b(\vec{y}), A_a^i(\vec{x})\} + \epsilon_{kj}{}^\ell A_b^k(\vec{y}) \{E_\ell^b(\vec{y}), A_a^i(\vec{x})\} \right] \\ &= \gamma \partial_a \Lambda_1^i(\vec{x}) - \gamma \epsilon_{kj}{}^i \Lambda_1^j(\vec{x}) A_a^k(\vec{x}), \\ \{G(\vec{\Lambda}_1), E_i^a(\vec{x})\} &= \int d^3y \Lambda_1^j(\vec{y}) \epsilon_{kj}{}^\ell E_\ell^b(\vec{y}) \{A_b^k(\vec{y}), E_i^a(\vec{x})\} \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) E_\ell^a(\vec{x}), \end{aligned}$$

on peut calculer :

$$\begin{aligned} &\{G(\vec{\Lambda}_1), \partial_a E_i^a(\vec{x}) + \epsilon_{ji}{}^k A_a^j(\vec{x}) E_k^a(\vec{x})\} \\ &= \partial_a \{G(\vec{\Lambda}_1), E_i^a(\vec{x})\} + \epsilon_{ji}{}^k \left[\{G(\vec{\Lambda}_1), A_a^j(\vec{x})\} E_k^a(\vec{x}) + A_a^j(\vec{x}) \{G(\vec{\Lambda}_1), E_k^a(\vec{x})\} \right] \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \partial_a \left[\Lambda_1^j(\vec{x}) E_\ell^a(\vec{x}) \right] + \gamma \epsilon_{ji}{}^k \left[(\partial_a \Lambda_1^j(\vec{x}) - \epsilon_{lm}{}^j \Lambda_1^m(\vec{x}) A_a^\ell(\vec{x})) E_k^a(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. + A_a^j(\vec{x}) \epsilon_{km}{}^\ell \Lambda_1^m(\vec{x}) E_\ell^a(\vec{x}) \right] \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) \partial_a E_\ell^a(\vec{x}) - \gamma \epsilon_{ji}{}^k \Lambda_1^m(\vec{x}) \left[\epsilon_{lm}{}^j A_a^\ell(\vec{x}) E_k^a(\vec{x}) - \epsilon_{km}{}^\ell A_a^j(\vec{x}) E_\ell^a(\vec{x}) \right] \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) \partial_a E_\ell^a(\vec{x}) - \gamma \Lambda_1^m(\vec{x}) \left[\epsilon_{ji}{}^k \epsilon_{lm}{}^j - \epsilon_{jm}{}^k \epsilon_{li}{}^j \right] A_a^\ell(\vec{x}) E_k^a(\vec{x}). \end{aligned}$$

On utilise ensuite la propriété suivante du tenseur complètement antisymétrique :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lm}{}^k - \epsilon_{imk} \epsilon_{lj}{}^k = \epsilon_{ilk} \epsilon_{jm}{}^k \quad \text{soit ici :} \quad \epsilon_{ji}{}^k \epsilon_{lm}{}^j - \epsilon_{jm}{}^k \epsilon_{li}{}^j = \epsilon_{im}{}^j \epsilon_{jl}{}^k,$$

pour terminer le calcul :

$$\begin{aligned} &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) \partial_a E_\ell^a(\vec{x}) - \gamma \Lambda_1^m(\vec{x}) \epsilon_{im}{}^j \epsilon_{jl}{}^k A_a^\ell(\vec{x}) E_k^a(\vec{x}) \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) \partial_a E_\ell^a(\vec{x}) - \gamma \Lambda_1^j(\vec{x}) \epsilon_{ij}{}^\ell \epsilon_{lm}{}^k A_a^m(\vec{x}) E_k^a(\vec{x}) \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) \left[\partial_a E_\ell^a(\vec{x}) + \epsilon_{ml}{}^k A_a^m(\vec{x}) E_k^a(\vec{x}) \right] \\ &= \gamma \epsilon_{ij}{}^\ell \Lambda_1^j(\vec{x}) G_\ell(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Obtenir le crochet de Poisson qu'on cherchait est maintenant une formalité :

$$\begin{aligned} \{G(\vec{\Lambda}_1), G(\vec{\Lambda}_2)\} &= \gamma \int d^3x \Lambda_1^j(\vec{x}) \Lambda_2^i(\vec{x}) \epsilon_{ij}{}^\ell G_\ell(\vec{x}) \\ &= -\gamma \int d^3x \left[\vec{\Lambda}_1(\vec{x}) \wedge \vec{\Lambda}_2(\vec{x}) \right]^\ell G_\ell(\vec{x}) = -\gamma G(\vec{\Lambda}_1 \wedge \vec{\Lambda}_2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

B Calcul de l'intertwiner cohérent

On sait que chaque intertwiner est invariant de jauge. On va montrer que cela revient à dire que l'on peut considérer les triangles duaux aux vertex seulement dans leur "forme", sans considérer leur orientation dans l'espace. En effet, considérons la normale \vec{u}_a au triangle. On peut toujours trouver une rotation N_a de $SU(2)$ qui envoie la matrice représentative de \vec{u}_a sur τ_2 :

$$N_a (u_a^i \tau_i) N_a^{-1} = \tau_2 . \quad (\text{B.1})$$

On sait alors que, après cette rotation effectuée, les vecteurs normaux du triangle sont contenus dans le plan (τ_1, τ_3) . On peut donc écrire :

$$N_a (n_{ab_1}^i \tau_i) N_a^{-1} = R_{\tau_2}(\theta_{ab_1}) \tau_3 R_{\tau_2}(\theta_{ab_1})^{-1} , \quad (\text{B.2})$$

$$N_a (n_{ab_2}^i \tau_i) N_a^{-1} = R_{\tau_2}(\theta_{ab_2}) \tau_3 R_{\tau_2}(\theta_{ab_2})^{-1} , \quad (\text{B.3})$$

$$N_a (n_{ab_3}^i \tau_i) N_a^{-1} = R_{\tau_2}(\theta_{ab_3}) \tau_3 R_{\tau_2}(\theta_{ab_3})^{-1} . \quad (\text{B.4})$$

Il est alors possible d'orienter le triangle avec une nouvelle rotation $M_a = R_{\tau_2}(\theta_{ab_1})^{-1}$ autour de τ_2 de sorte que \vec{n}_{ab_1} soit colinéaire à τ_3 :

$$M_a N_a (n_{ab_1}^i \tau_i) N_a^{-1} M_a^{-1} = \tau_3 , \quad (\text{B.5})$$

$$M_a N_a (n_{ab_2}^i \tau_i) N_a^{-1} M_a^{-1} = R_{\tau_2}(\theta_{ab_2} - \theta_{ab_1}) \tau_3 R_{\tau_2}(\theta_{ab_2} - \theta_{ab_1})^{-1} , \quad (\text{B.6})$$

$$M_a N_a (n_{ab_3}^i \tau_i) N_a^{-1} M_a^{-1} = R_{\tau_2}(\theta_{ab_3} - \theta_{ab_1}) \tau_3 R_{\tau_2}(\theta_{ab_3} - \theta_{ab_1})^{-1} , \quad (\text{B.7})$$

où $\theta_{ab_2} - \theta_{ab_1}$ est simplement l'angle entre les deux normales \vec{n}_{ab_1} et \vec{n}_{ab_2} , que l'on va appeler φ_{ab_2} (idem pour θ_{ab_3} , à ceci près qu'on obtient $-\varphi_{ab_3}$, voir Fig. 13).

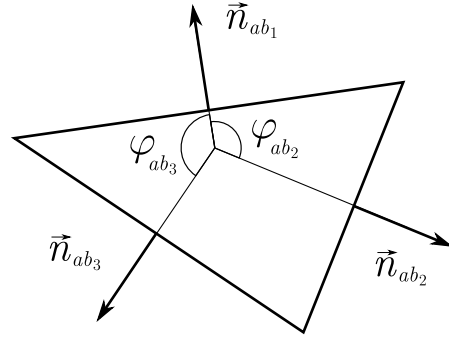


FIGURE 13 – Un triangle quelconque appartenant au tétraèdre, avec ses trois normales et les angles entre elles.

Sachant que la définition des N_{ab_k} est justement :

$$N_{ab_k} \tau_3 N_{ab_k}^{-1} \equiv n_{ab_k}^i \tau_i , \quad (\text{B.8})$$

on lit directement :

$$N_{ab_1} = N_a^{-1} M_a^{-1} , \quad (\text{B.9})$$

$$N_{ab_2} = N_a^{-1} M_a^{-1} R_{\tau_2}(\varphi_{ab_2}) , \quad (\text{B.10})$$

$$N_{ab_3} = N_a^{-1} M_a^{-1} R_{\tau_2}(-\varphi_{ab_3}) . \quad (\text{B.11})$$

L'invariance de jauge nous permet ensuite de multiplier les trois N_{ab_k} à gauche par n'importe quelle rotation de $SU(2)$ simultanément sans changer la valeur de l'intertwiner. On

choisit naturellement de multiplier par $M_a N_a$, et on se retrouve alors simplement avec :

$$\tilde{N}_{ab_1} = \mathbb{1}, \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{N}_{ab_2} = \mathbf{R}_{\tau_2}(\varphi_{ab_2}), \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{N}_{ab_3} = \mathbf{R}_{\tau_2}(-\varphi_{ab_3}). \quad (\text{B.14})$$

On introduit alors ce résultat dans l'intertwiner :

$$V_a(\{j_{ab_i}, N_{ab_i}, p_{ab_i}\}) = \sum_{\{m_{ab_i}\}, b_i \in v(a)} (3j)_{m_{ab_1}, m_{ab_2}, m_{ab_3}}^{j_{ab_1}, j_{ab_2}, j_{ab_3}} \delta_{m_{ab_1}, p_{ab_1}} d_{m_{ab_2}, p_{ab_2}}^{j_{ab_2}}(\varphi_{ab_2}) d_{m_{ab_3}, p_{ab_3}}^{j_{ab_3}}(-\varphi_{ab_3}), \quad (\text{B.15})$$

où les deux angles sont obtenus par simple géométrie :

$$\vec{n}_{ab_1} \cdot \vec{n}_{ab_2} = \cos(\varphi_{ab_2}), \quad (\text{B.16})$$

$$\vec{n}_{ab_1} \cdot \vec{n}_{ab_3} = \cos(\varphi_{ab_3}), \quad (\text{B.17})$$

soit explicitement :

$$\cos(\varphi_{ab_2}) = \frac{\ell_{ab_3}^2 - \ell_{ab_1}^2 - \ell_{ab_2}^2}{2 \ell_{ab_1} \ell_{ab_2}}, \quad (\text{B.18})$$

$$\cos(\varphi_{ab_3}) = \frac{\ell_{ab_2}^2 - \ell_{ab_1}^2 - \ell_{ab_3}^2}{2 \ell_{ab_1} \ell_{ab_3}}. \quad (\text{B.19})$$

Ils ne dépendent donc que des longueurs des arêtes du triangle : la donnée des normales est inutile.

C Simplification de l'intertwiner cohérent pour $p_i = j_i$

Les matrices d^j sont de manière générale :

$$d_{m,n}^j(\theta) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+n)!(j-n)!} \sum_s \frac{(-1)^s \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2j+n-m-2s} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{m-n+2s}}{(j+n-s)!s!(m-n+s)!(j-m-s)!},$$

où s est un entier positif, et la somme sur s est restreinte aux valeurs de s qui laissent toutes les factorielles positives. Dans le cas $n = j$, on voit que cette expression se simplifie grandement :

$$d_{m,j}^j(\theta) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(2j)!} \sum_s \frac{(-1)^s \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{3j-m-2s} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{m-j+2s}}{(2j-s)!s!(m-j+s)!(j-m-s)!},$$

où l'on voit que seule la valeur $s = j - m$ est permise. On a donc :

$$d_{m,j}^j(\theta) = (-1)^{j-m} \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{j+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{j-m},$$

Pour les symboles $3j$, la formule générale est :

$$\begin{aligned} & (3j)_{m_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} \\ &= (-1)^{-j_1+j_2+m_3} \delta_{m_1+m_2+m_3, 0} \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}} \\ & \quad \sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!} \\ & \quad \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_1+j_2-j_3-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!} \\ & \quad \frac{1}{(j_3-j_2+m_1+k)!(j_3-j_1-m_2+k)!}, \end{aligned}$$

où, de même, la somme sur $k \in \mathbb{N}$ est restreinte à laisser les factorielles positives. Dans le cas $m_1 = j_1$, on a nécessairement $k = 0$, soit après simplifications :

$$\begin{aligned} (3j)_{j_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} &= \sqrt{\frac{(-j_1+j_2+j_3)!(2j_1)!(j_2-m_2)!(j_3-m_3)!}{(j_1-j_2+j_3)!(j_1+j_2-j_3)!(j_1+j_2+j_3+1)!(j_2+m_2)!(j_3+m_3)!}} \\ & \quad (-1)^{-j_1+j_2+m_3} \delta_{j_1+m_2+m_3, 0}, \end{aligned}$$

En rassemblant le tout, on a finalement :

$$\begin{aligned}
V(j_1, j_2, j_3) &= \sum_{m_2, m_3} (3j)_{j_1, m_2, m_3}^{j_1, j_2, j_3} d_{m_2, j_2}^{j_2}(\varphi_2) d_{m_3, j_3}^{j_3}(-\varphi_3) \\
&= \sum_{m_2, m_3} (-1)^{-j_1 + j_2 + m_3} \delta_{j_1 + m_2 + m_3, 0} \\
&\quad \sqrt{\frac{(-j_1 + j_2 + j_3)!(2j_1)!(j_2 - m_2)!(j_3 - m_3)!}{(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!(j_2 + m_2)!(j_3 + m_3)!}} \\
&\quad (-1)^{j_2 - m_2} \sqrt{\frac{(2j_2)!}{(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!}} \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 + m_2} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 - m_2} \\
&\quad (-1)^{j_3 - m_3} \sqrt{\frac{(2j_3)!}{(j_3 + m_3)!(j_3 - m_3)!}} \cos\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_3 + m_3} \sin\left(-\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_3 - m_3} \\
&= \sqrt{\frac{(-j_1 + j_2 + j_3)!(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \\
&\quad \sum_{m_2, m_3} (-1)^{2j_2 + 2j_3} \delta_{j_1 + m_2 + m_3, 0} \frac{1}{(j_2 + m_2)!(j_3 + m_3)!} \\
&\quad \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 + m_2} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 - m_2} \cos\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_3 + m_3} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_3 - m_3} \\
&= \sqrt{\frac{(-j_1 + j_2 + j_3)!(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \frac{1}{2^{j_2 + j_3}} \sin(\varphi_2)^{j_2} \sin(\varphi_3)^{j_3} \\
&\quad (-1)^{2j_2 + 2j_3} \sum_{m_3 = -j_3}^{j_2 - j_1} \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1 + m_3} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-m_3}}{(j_2 - j_1 - m_3)!(j_3 + m_3)!}.
\end{aligned}$$

On va essayer de ré-exprimer cette dernière somme. On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{m_3 = -j_3}^{j_2 - j_1} \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1 + m_3} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-m_3}}{(j_2 - j_1 - m_3)!(j_3 + m_3)!} \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1}}{(j_2 - j_1 + j_3)!} \sum_{m_3 = -j_3}^{j_2 - j_1} \frac{(j_2 - j_1 + j_3)!}{(j_2 - j_1 - m_3)!(j_3 + m_3)!} \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{m_3} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-m_3} \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1}}{(j_2 - j_1 + j_3)!} \sum_{u=0}^{j_2 - j_1 + j_3} \frac{(j_2 - j_1 + j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3 - u)!u!} \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{u - j_3} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_3 - u} \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1}}{(j_2 - j_1 + j_3)!} \left[\frac{\tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)} \right]^{j_3} \sum_{u=0}^{j_2 - j_1 + j_3} \frac{(j_2 - j_1 + j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3 - u)!u!} \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^u \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-u} \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1 - j_3}}{(j_2 - j_1 + j_3)!} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_1 - j_2} \left[\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) \right]^{j_2 - j_1 + j_3}
\end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned}
V(j_1, j_2, j_3) &= \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3)!(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \\
&\quad \sin(\varphi_2)^{j_2} \sin(\varphi_3)^{j_3} \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_1 - j_3} \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_1 - j_2} \\
&\quad \frac{(-1)^{2j_2 + 2j_3}}{2^{j_2 + j_3}} \left[\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) \right]^{j_2 - j_1 + j_3} \\
&= \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3)!(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \\
&\quad \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 - j_1 + j_3} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 + j_1 - j_3} \cos\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{j_2 - j_1 + j_3} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-j_2 + j_1 + j_3} \\
&\quad (-1)^{2j_2 + 2j_3} \left[\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) + \tan\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) \right]^{j_2 - j_1 + j_3} \\
&= \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(2j_3)!}{(j_2 - j_1 + j_3)!(j_1 - j_2 + j_3)!(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} \\
&\quad (-1)^{2j_2 + 2j_3} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{j_2 + j_1 - j_3} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)^{-j_2 + j_1 + j_3} \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right)^{j_2 - j_1 + j_3}.
\end{aligned}$$

Par la suite, nous allons étudier les cas où les j s sont grands. On va donc avoir besoin d'une expression asymptotique des intertwiners, en particulier trouver une expression pour $\frac{V(j_1, j_2, j_3 + 1)}{V(j_1, j_2, j_3)}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
V(j_1, j_2, j_3 + 1) &= \sqrt{\frac{(2j_3 + 2)(2j_3 + 1)(j_1 + j_2 - j_3)}{(j_1 - j_2 + j_3 + 1)(j_2 - j_1 + j_3 + 1)(j_1 + j_2 + j_3 + 2)}} \\
&\quad \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{-1} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) V(j_1, j_2, j_3). \quad (C.1)
\end{aligned}$$

Si l'on note ensuite $j_1 = xj$, $j_2 = yj$ et $j_3 = j$ avec $x \in]0, 1]$ et $y \in [1 - x, 1]$ (on suppose pour le calcul que j_3 est le plus grand des trois spins), l'expression devient, pour j grand :

$$\frac{V(xj, yj, j + 1)}{V(xj, yj, j)} = \sqrt{\frac{4(x + y - 1)}{(1 - (x - y)^2)(x + y + 1)}} \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)^{-1} \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right). \quad (C.2)$$

On choisit ensuite de prendre $\ell_i = j_i$. En effet, on cherche à construire nos états cohérents de sorte que $\ell_i \simeq \langle j_i \rangle$ et $\frac{\Delta j_i}{\langle j_i \rangle} \rightarrow 0$, c'est à dire que la distribution des spins est piquée sur $j_i = \ell_i$ (cette approximation est supportée par une analyse numérique). Dans ce cas :

$$\cos(\varphi_2) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2xy}, \quad \text{et} : \quad \cos(\varphi_3) = \frac{y^2 - x^2 - 1}{2x}. \quad (C.3)$$

Il se trouve alors que le résultat est *identiquement égal* à 1, et donc que, pour j grand, l'intertwiner est une simple constante qui ne dépend que de x et y . On peut donc complètement les oublier dans les calculs, où ils n'interviennent que comme des facteurs de normalisation.

Références

- [1] H. Minkowski, *Allgemeine Lehrsätze über die konvexe Polyeder*, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1989-219 (1897)
- [2] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik 769-822 **49** (1916)
- [3] C. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1970)
- [4] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, V. K. Khersonskii, *Quantum theory of angular momentum*, World Scientific Publishing Company Inc. (1988)
- [5] J. Fernando, G. Barbero, *Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times*, arXiv:gr-qc/9410014v1 (1994)
- [6] S. Holst, *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*, arXiv:gr-qc/9511026v1 (1995)
- [7] H.-J. Matschull, *Dirac's Canonical Quantization Programme*, arXiv:quant-ph/9606031v1 (1996)
- [8] A. Ashtekar, J. Lewandowski, *Quantum theory of geometry. II : Volume operators*, arXiv:gr-qc/9711031 (1998)
- [9] A. Barbieri, *Quantum tetrahedra and simplicial spin networks*, arXiv:gr-qc/9707010v2 (1998)
- [10] K. Kowalski, J. Rembieliński, L. C. Papaloucas, *Coherent states for a quantum particle on a circle*, arXiv:quant-ph/9801029v1 (1998)
- [11] N. Barros e Sá, *Hamiltonian analysis of general relativity with the Immirzi parameter*, arXiv:gr-qc/0006013v1 (2000)
- [12] L. Freidel, E. R. Livine, C. Rovelli, *Spectra of Length and Area in $(2 + 1)$ Lorentzian Loop Quantum Gravity*, arXiv:gr-qc/0212077v2 (2003)
- [13] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2004)
- [14] C. Aslangul, *Mécanique quantique - Tome 1*, De Boeck (2007)
- [15] E. R. Livine, S. Speziale, *A new spinfoam vertex for quantum gravity*, arXiv:0705.0674v2 (2007)
- [16] P. Doná, S. Speziale, *Introductory lectures to loop quantum gravity*, arXiv:1007.0402v2 (2010)
- [17] E. Bianchi, E. Magliaro, C. Perini, *Coherent spin-networks*, arXiv:0912.4054v4 (2010)
- [18] L. Freidel, S. Speziale, *Twisted geometries : A geometric parametrization of $SU(2)$ phase space*, arXiv:1001.2748v3 (2010)